

**Третья национальная научная конференция с международным участием
«Математическое моделирование в экологии»**

Фитопланктон в море. Модельный анализ и оценки

**Абакумов А.И.
Институт автоматки и процессов управления
ДВО РАН**

Замкнутые модели минерального питания

Базовая модель

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \mu_i(z)y_i - e_i(y_i)y_i \\ \dot{z} = \rho(s) - \sum_{i=1}^n \mu_i(z)y_i \\ \dot{s} = \sum_{i=1}^n e_i(y_i)y_i - \rho(s) \end{cases} \quad (1)$$

$$\mu_i(z) = \mu_i^{(0)} \frac{z}{k_i + z}$$

Модели с внутриклеточным содержанием веществ

$$\begin{cases} \dot{y}_i = \mu_i(q_i) \cdot y_i - e_i(y_i)y_i \\ \dot{z}_j = \rho_j(s_j) - \sum_{i=1}^m v_{ij}(z_j, q_{ij})y_i \\ \dot{s}_j = \sum_{i=1}^m e_i(y_i)q_{ij}y_i - \rho_j(s_j) \\ \dot{q}_{ij} = v_{ij}(z_j, q_{ij}) - \mu_i(q_i) \cdot q_{ij} \end{cases} \quad (2)$$

$$v_{ij}(z_j, q_{ij}) = \bar{v}_{ij}(q_{ij}) \frac{z_j}{k_{ij} + z_j}$$

$$\mu_i(q_i) = \min_j \mu_{ij}(q_{ij})$$

Модель Друпэ

$$\bar{v}_{ij}(q_{ij}) = v_{ij}^{(0)} \frac{\bar{q}_{ij} - q_{ij}}{\bar{q}_{ij} - \underline{q}_{ij}}$$

$$\mu_{ij}(q_{ij}) = \mu_{ij}^{(0)} \frac{q_{ij} - \underline{q}_{ij}}{q_{ij}}$$

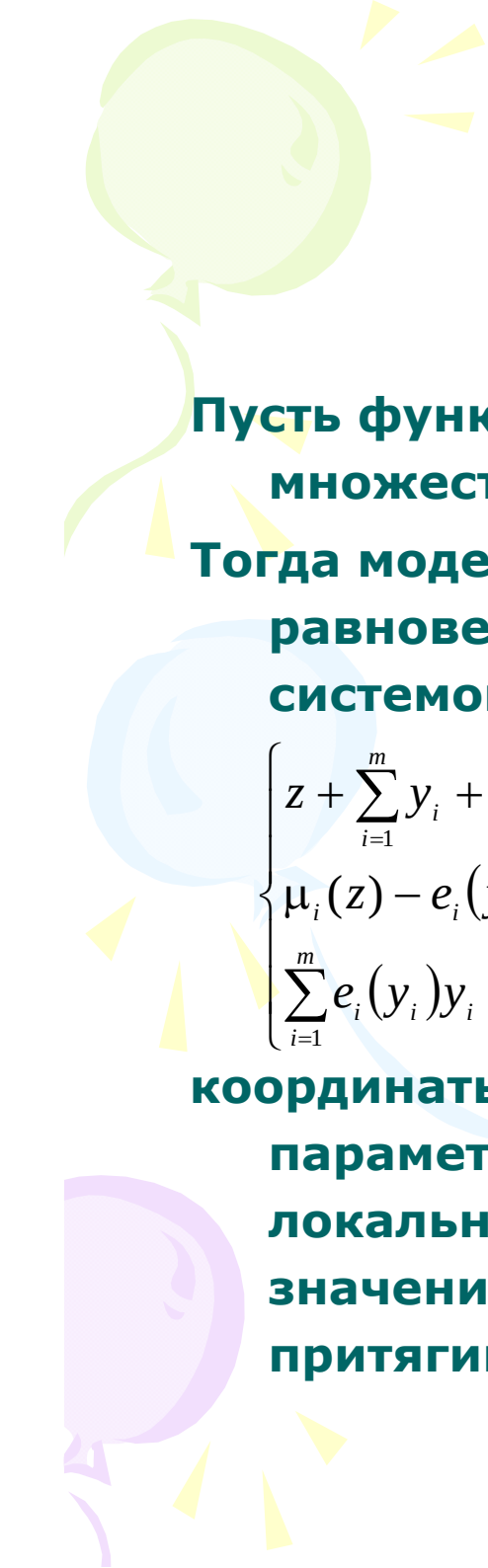
Модель со стехиометрией

$$\bar{v}_{ij}(q_j) = v_i^{(0)} \frac{s_j}{q_{ij}} q_i \frac{(\bar{q}_i - q_i)}{\bar{q}_i - \underline{q}_i}$$

$$q_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} \quad \bar{q}_i = \sum_{j=1}^n \bar{q}_{ij} \quad \underline{q}_i = \sum_{j=1}^n \underline{q}_{ij}$$

$$\mu_{ij}(q_{ij}) = \mu_{ij}^{(0)} \frac{q_{ij}}{q_{ij}^{(0)} + q_{ij}}$$

$$e_i(y) = e_i^{(0)} + e_i^{(1)}(y_i)$$



Равновесные решения в модели (1)

Пусть функции μ_i, e_i, ρ в модели (1) строго возрастают на множествах неотрицательных значений своих аргументов.

Тогда модель (1) имеет непустое множество положительных равновесных локально устойчивых решений, определяемых системой

$$\begin{cases} z + \sum_{i=1}^m y_i + s = c \\ \mu_i(z) - e_i(y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^m e_i(y_i) y_i - r(s) = 0 \end{cases},$$

координаты равновесий являются функциями положительного параметра c . Если начальное состояние системы близко к локально устойчивому равновесию и они имеют общее значение параметра c , то решение асимптотически притягивается к этому равновесию.

Равновесные решения в модели (2)

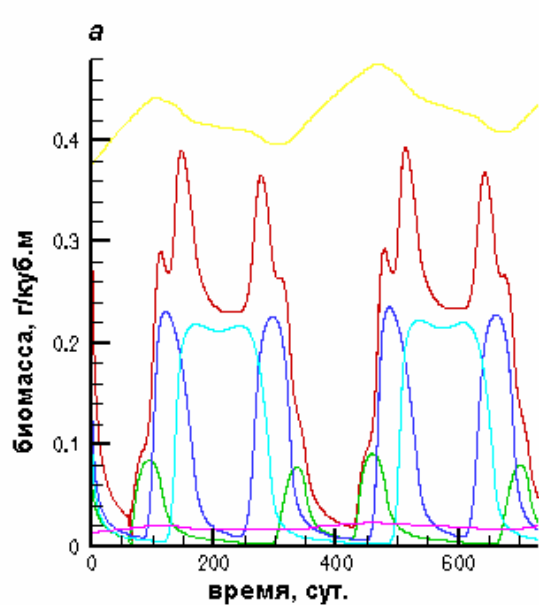
Пусть функции μ_{ij}, e_i, r_i в модели (2) строго возрастают по своим аргументам, а функции v_{ij} строго возрастают по z_j и строго убывают по q_{ij} .

Тогда модель (2) имеет непустое множество положительных равновесных решений, определяемых системой

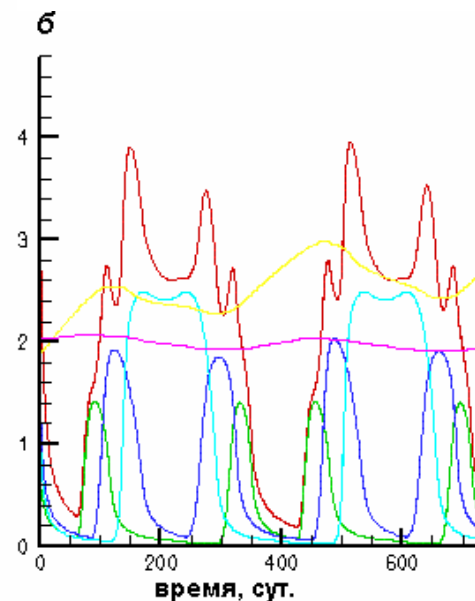
$$\begin{cases} z_j + \sum_{i=1}^m q_{ij} y_i + s_j = c_j \\ \mu_i(q_i) - e_i(y_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^m e_i(y_i) q_{ij} y_i - \rho_j(s_j) = 0 \\ v_{ij}(z_j, q_{ij}) - \mu_i(q_i) \cdot q_{ij} = 0 \end{cases}$$

координаты равновесий являются функциями вектора $c = (c_1, \dots, c_n)$ положительных параметров.

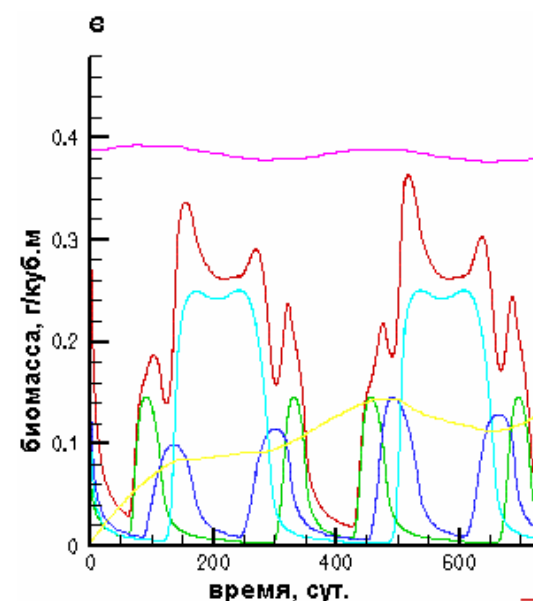
Динамика биомасс трех групп фитопланктонных организмов (модель Друпа)



а – преобладание азота во внешней среде

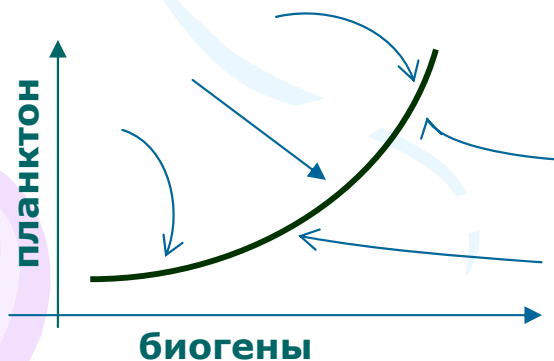


б – примерное равенство двух биогенов



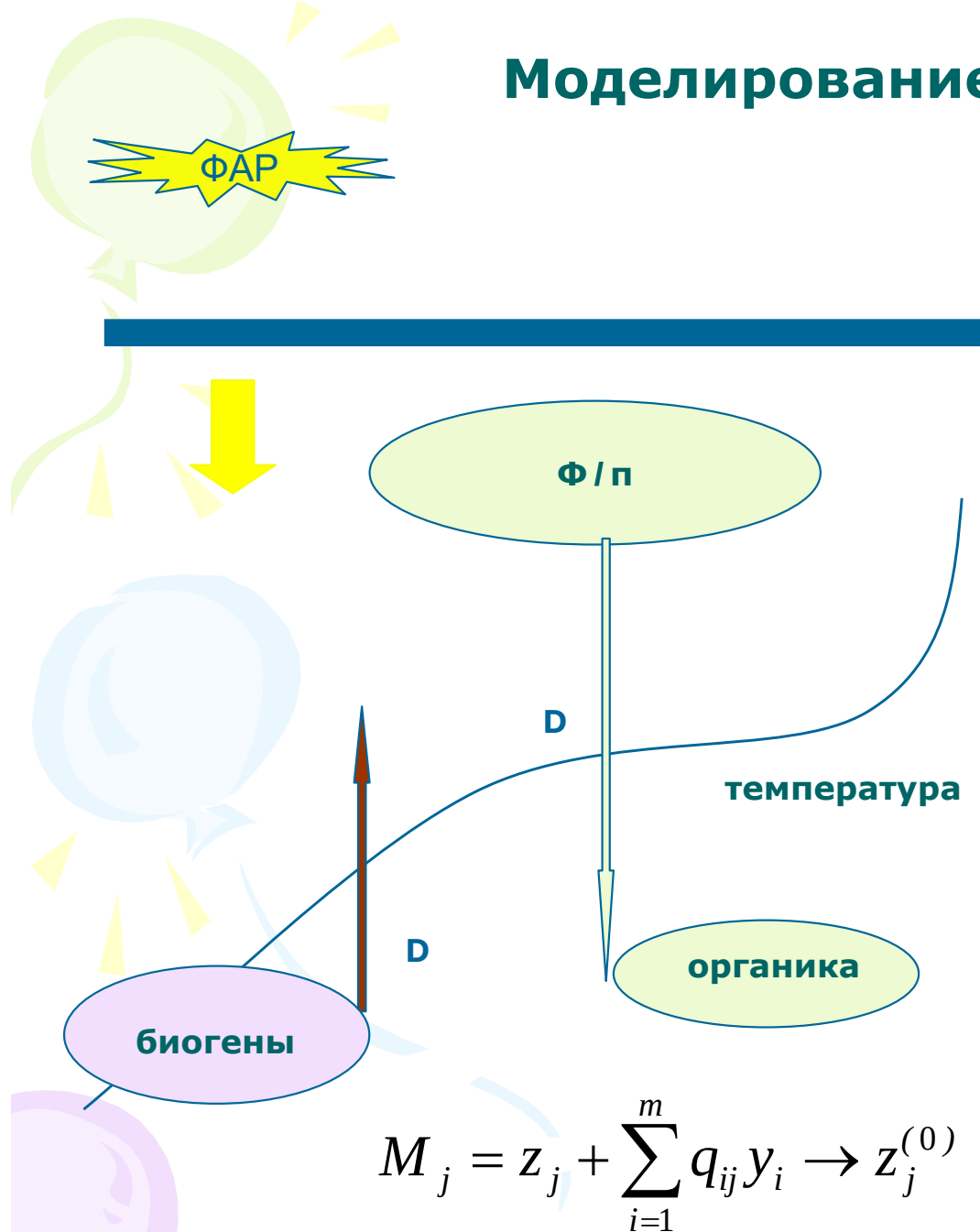
в – преобладание фосфора во внешней среде

- суммарная биомасса
- 1-ая группа видов
- 2-ая группа видов
- 3-ья группа видов
- азот
- фосфор



Абакумов А.И., Пак С.Я., Симонов А.С. Модель минерального питания фитопланктона // Информатика и системы управления, 2011, № 1 (27), с. 17 - 26.

Моделирование фитопланктона



$$\begin{cases} \dot{y}_i = [\mu_i(q_i) - D] y_i \\ \dot{z}_j = D(z_j^{(0)} - z_j) - \sum_{i=1}^m v_{ij}(z_j, q_{ij}) y_i \\ \dot{q}_{ij} = v_{ij}(z_j, q_{ij}) - \mu_i(q_i) \cdot q_{ij} \end{cases}$$

$$\mu_{ij}(q) = \mu_{ij}^{(0)} \left(1 - \frac{q_{ij}}{q_{ij}^*}\right)$$

$$v_{ij}(z_j, q_{ij}) = v_{ij}^{(0)} \frac{z_j}{k_{ij} + z_j} \cdot \left[\frac{\bar{q}_{ij} - q_{ij}}{\bar{q}_{ij} - \underline{q}_{ij}} \right]$$

$$\mu_j(q_j) = \min_i \mu_{ij}(q_{ij})$$

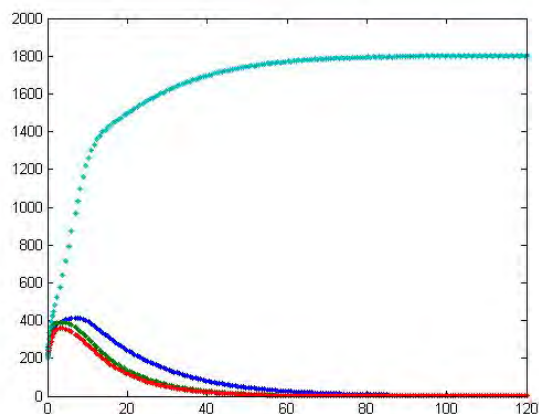


Структура данных об основных видах

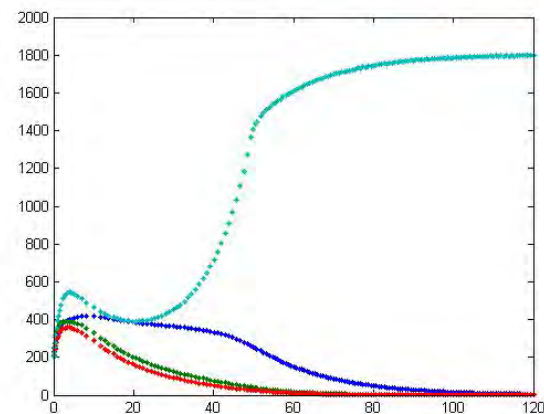
Коэффициент	Размерность	<i>Emiliana huxleyi</i>	<i>Pseudo-nitzschia pseudo-delicatis-sima</i>	<i>Proboscia alata</i>	<i>Chaetoceros curvisetus</i>
$\mu_{max} N$	1 / сут	1.92	2.70	1.44	3.75
$\mu_{max} P$	1 / сут	1.55	1.84	1.22	2.56
$U^m N$	мкмN / (сут·мг сырой биомассы)	0.0379	0.0771	0.1200	0.0714
$U^m P$	мкмP / (сут·мг сырой биомассы)	0.1452	0.5806	0.5420	0.6450
K_N	мкм / л	0.1000	0.7143	1.4286	0.0714
K_P	мкм / л	1.1613	0.5161	0.8710	0.9677
q_N	мкмN / (мг сырой биомассы)	0.2143	0.2143	0.2143	0.2143
q_P	мкмP / (мг сырой биомассы)	0.00645	0.00645	0.00645	0.00645

D = 0.1

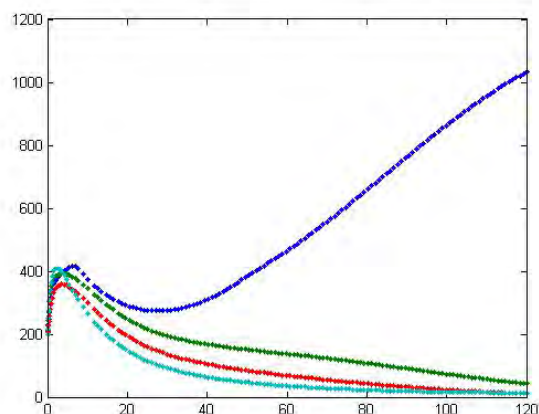
Динамика биомасс в весенний период



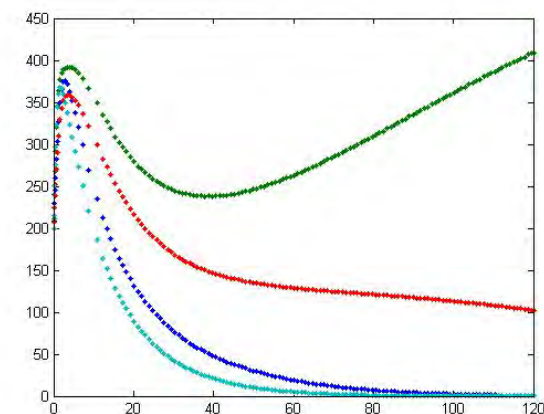
N/P = 1



N/P = 8



N/P = 16



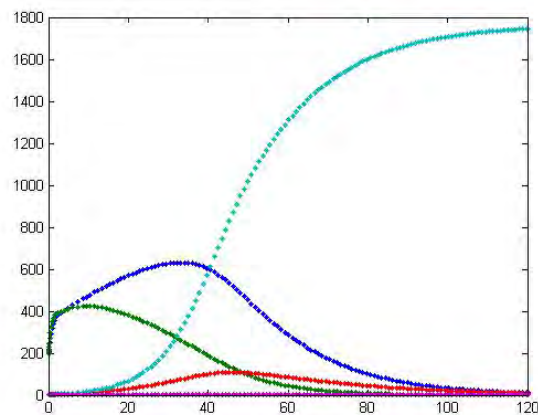
N/P = 32

Динамика концентраций: *Emiliana h.* – синий, *Pseudonitzshia* – зеленый, *Chaet. trondsenii* – красный, *Chaet. minimus* – сиреневый. По горизонтальной оси – время в сутках, по вертикальной – концентрации в мг/м³. Концентрация азота во входящем потоке - N=0.429 мкмоль/л. Начальные биомассы – по 200 мг/м³.

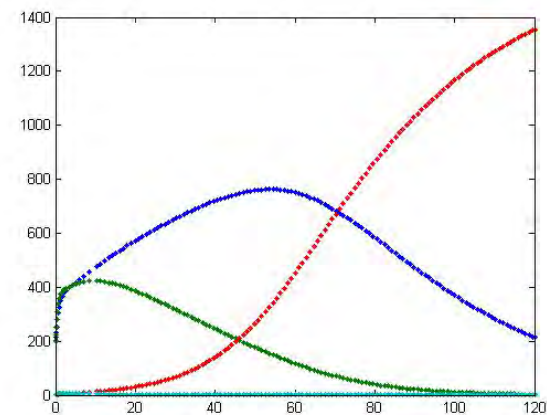
Инвазии

Коэффициент	Размерность	<i>Emiliana huxleyi</i>	<i>Pseudo-nitzschia pseudo-delicatissima</i>	<i>Chaetoceros trondsenii</i>	<i>Chaetoceros minimus</i>
$\mu_{max} N$	1 / сут	1.92	2.70	1.80	2.25
$\mu_{max} P$	1 / сут	1.55	1.84	1.55	2.60
$U^m N$	мкмN / (сут·мг сырой биомассы)	0.0379	0.0771	0.0714	0.0714
$U^m P$	мкмP / (сут·мг сырой биомассы)	0.1452	0.5807	0.1161	0.0645
$K N$	мкм / л	0.1000	0.7143	0.1429	0.0714
$K P$	мкм / л	1.1614	0.5162	0.6452	1.4517
q_N	мкмN / (мг сырой биомассы)	0.2143	0.2143	0.2143	0.2143
q_P	мкмP / (мг сырой биомассы)	0.00645	0.00645	0.00645	0.00710

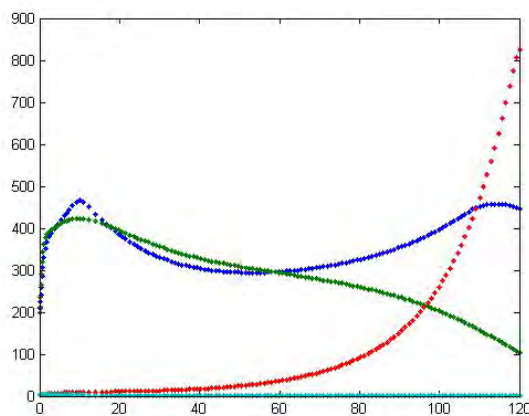
D = 0.1



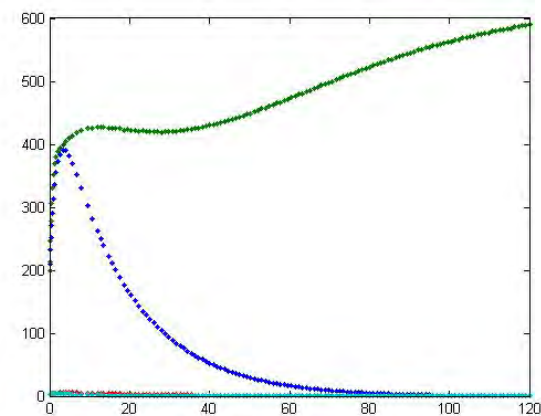
$N/P = 1$



$N/P = 8$



$N/P = 16$



$N/P = 32$

Динамика концентраций: *Emiliana h.* – синий, *Pseudonitzshia* – зеленый, *Chaet. trondsenii* – красный, *Chaet. minimus* – сиреневый. По горизонтальной оси – время в сутках, по вертикальной – концентрации в mg/m^3 . Концентрация азота во входящем потоке - $N = 0.429$ $\text{мкг}/\text{л}$. Начальные биомассы – *Emiliana h.*, *Pseudonitzshia* – 200 $\text{мг}/\text{м}^3$, *Chaet. trondsenii*, *Chaet. minimus* – 2.5 $\text{мг}/\text{м}^3$.

Поиск равновесных решений

Определим матрицу $\bar{Z} = (\bar{z}_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ из условия $\bar{z}_{ij} = \tilde{\mu}_{ij}^{-1}(D)$. Здесь

$\tilde{\mu}_{ij}(z_j) = \mu_{ij}(\tilde{q}_{ij}(z_j))$, $\tilde{q}_{ij}(z_j)$ определяется из условия $v_{ij}(z_j, q_{ij}) - D \cdot q_{ij} = 0$.

Это означает, что $\bar{z}_{ij} \geq 0$ - кандидат в равновесные значения при $y_i^* > 0$.

Для равновесия (y^*, z^*) выполняются следующие свойства (**).

(1*) Если $y_i^* > 0$, то $\forall j \ z_j^* \geq \bar{z}_{ij}, \exists j_0 \ z_{j_0}^* = \bar{z}_{ij_0}$.

Такой вид i назовем доминирующим, а вещество j_0 - лимитирующим.

(2*) Если $\exists j \ z_j^* < \bar{z}_{ij}$, то $y_i^* = 0$. Такой вид i назовем элиминированным.

(3*) Если $\forall j \ z_j^* > \bar{z}_{ij}$, то $y_i^* = 0$. Такой вид i назовем свободным.

При построении способа поиска равновесных решений опираемся на свойства (*), используем матрицу $\bar{z}$. Для каждого множества $I_*, I_* \subset I$ определяем отображение $\varphi: I_* \rightarrow J$, удовлетворяющее для каждого $i \in I_*$ и для $j = \varphi(i)$ условиям $\bar{z}_{ij} \in [0, z_j^{(0)}]$ и $\forall k \in I_* \bar{z}_{ij} \geq \bar{z}_{kj}$.

Для $j = \varphi(i)$ определяем равновесные значения $z_j^* = \bar{z}_{ij}$.

Решаем систему уравнений $\sum_{i \in I_k} \tilde{q}_{ij}(z_j) y_i = z_j^{(0)} - z_j$ относительно переменных $y_i \geq 0, z_j \in [0, z_j^{(0)}]$ с условиями:

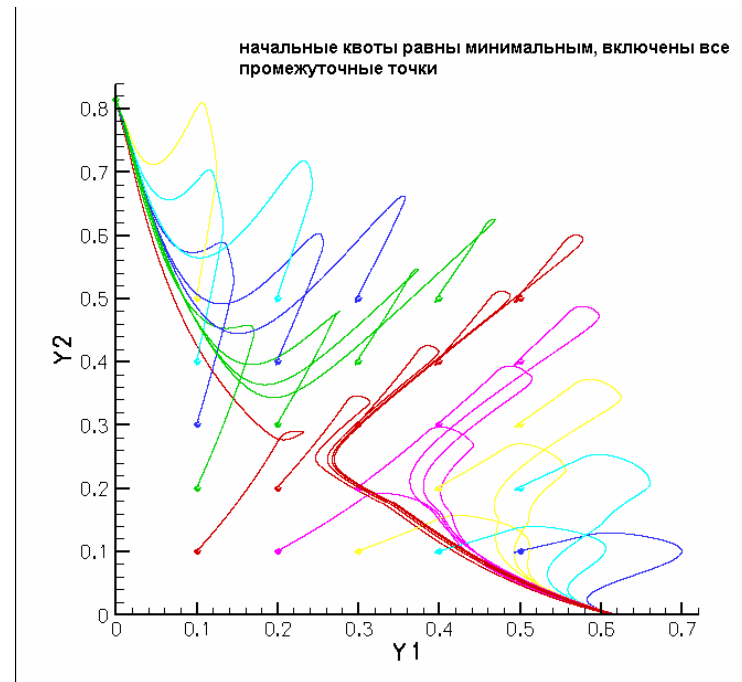
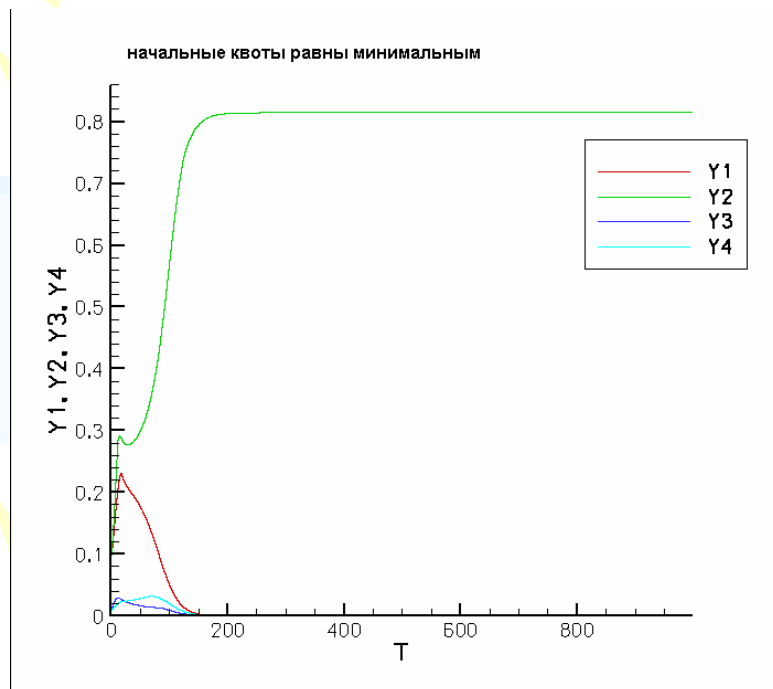
$z_j = z_j^*$ для $j \in \varphi(I_*)$ и $y_i = 0$ для $i \notin I_*$.

Такое решение и есть искомое равновесие.

Абакумов А.И. Признаки стабильности водных экосистем в математических моделях // Труды Института системного анализа РАН. Системный анализ проблемы устойчивого развития. М.: ИСА РАН. 2010, т. 54, с. 49 – 60.

Абакумов А.И. Устойчивость в моделях жизнедеятельности фитопланктона // Вестник НГУ (серия: информационные технологии). 2012, т. 10, вып. 1, с. 24 – 32.

Устойчивость. Поиск равновесий.



Абакумов А.И., Пак С.Я. Сосуществование видов в микробном сообществе. Модельное исследование // Информатика и системы управления. 2012, №3(33), с. 15 – 24.

Вертикальное распределение фитопланктона

$$\begin{cases} \frac{\partial y_i}{\partial t} = k_i^{(y)} \frac{\partial^2 y_i}{\partial x^2} + \mu_i(t, x, z, I) y_i - e_i(y) y_i \\ \frac{\partial z}{\partial t} = k^{(z)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^m \gamma_i \mu_i(t, x, z, I) y_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \gamma_i e_i(y) y_i \\ \frac{\partial I}{\partial x} = -\alpha(t, x, y, z) I \end{cases}$$

$$\mu_i(t, x, z, I) = \mu_i^{(0)} \cdot \mu_i^{(z)}(z) \cdot \mu^{(I)}(I) \cdot \mu_i^{(\theta)}(\theta(t, x))$$

$$\mu_i^{(z)}(z) = \frac{z}{z_i^{(0)} + z}$$

$$\mu^{(I)}(I) = I \exp(-\delta I)$$

$$\mu_i^{(\theta)}(\theta) = \exp\left(-\frac{(\theta - \theta_i^{(0)})^2}{2\tau_i^2}\right)$$

$$e_i(y) = e_{i0} + e_{i1} y$$

$$\alpha(t, x, y, z) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_{i1} y_i + \alpha_2 z$$

Годовой цикл

$$\theta(t, x) = \theta_m(t) \exp\left(-\frac{(x - x_\theta(t))^2}{2\sigma^2(t)}\right) \quad \theta_m(t) = 4\frac{t}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)$$

$$I(t, 0) = 4I_1\frac{t}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right) + I_0$$

$$\left.\frac{\partial y_i}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial y_i}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = 0$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$z_j(t, \bar{x}) = \tilde{z}_j$$

$\theta(t, x)$

t

0

70

140

300

365

σ

100

100

20

20

100

x_θ

40

40

0

0

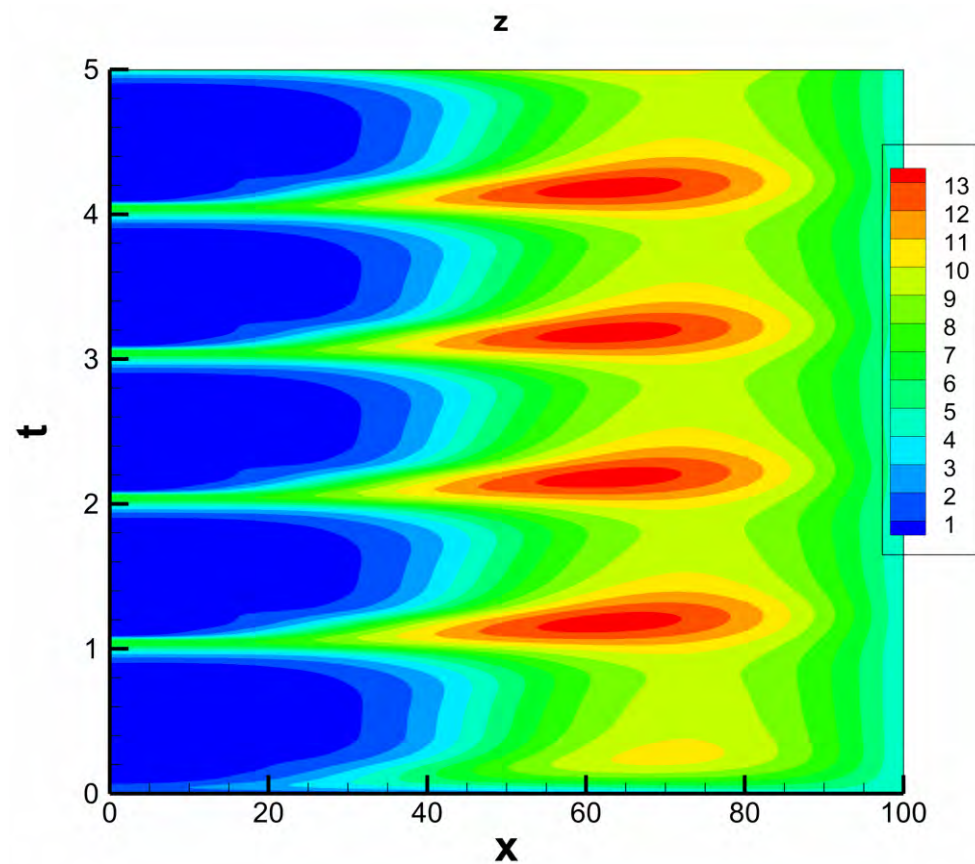
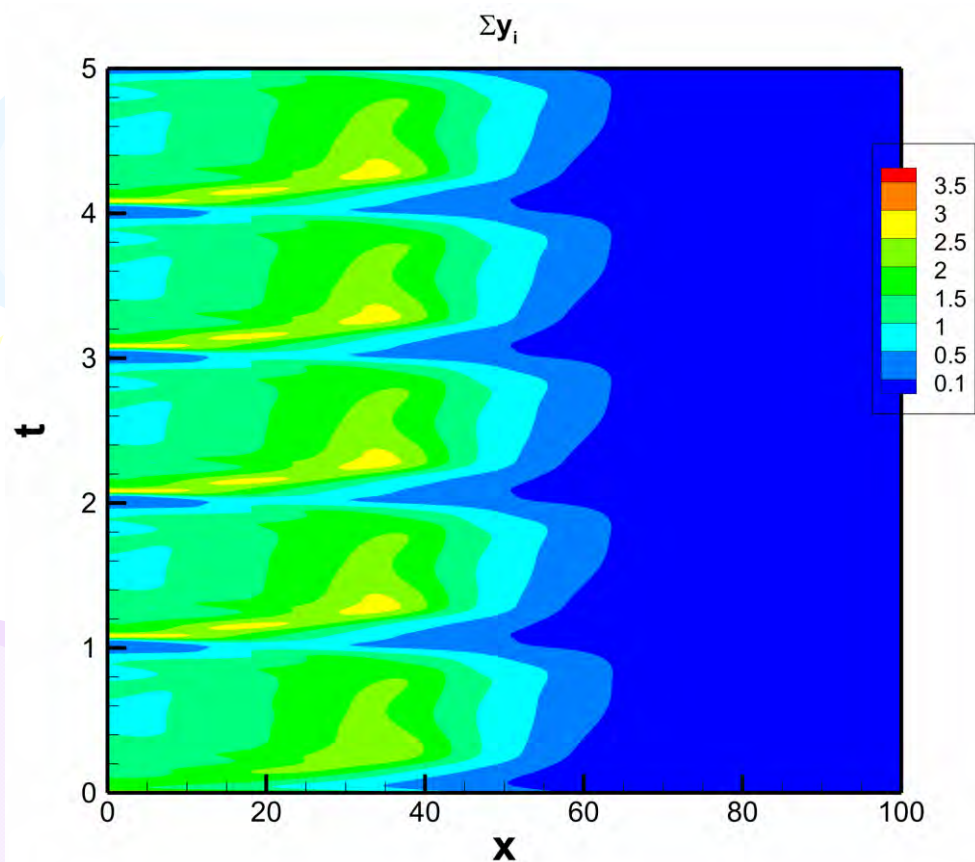
40

Абакумов А.И., Израильский Ю.Г. Влияние условий среды на распределение фитопланктона в водоеме // Математическая биология и биоинформатика. 2012, т. 7, № 1, с. 274 – 283.

Три группы планктона

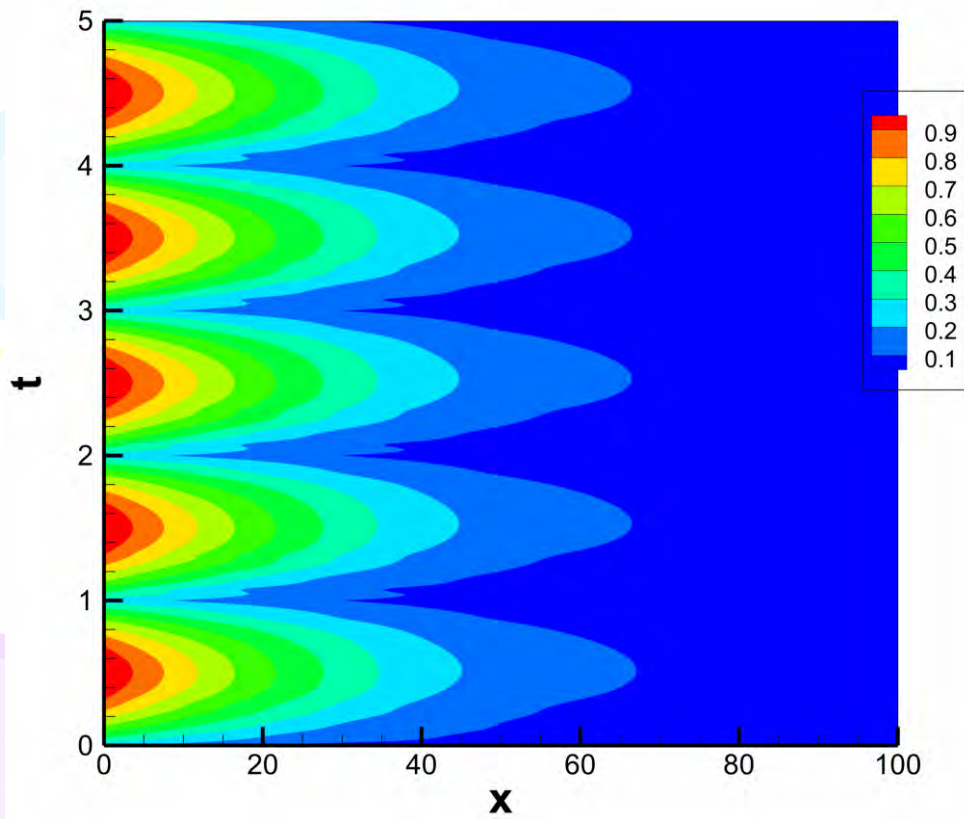
Плотность общей биомассы

Питательные вещества

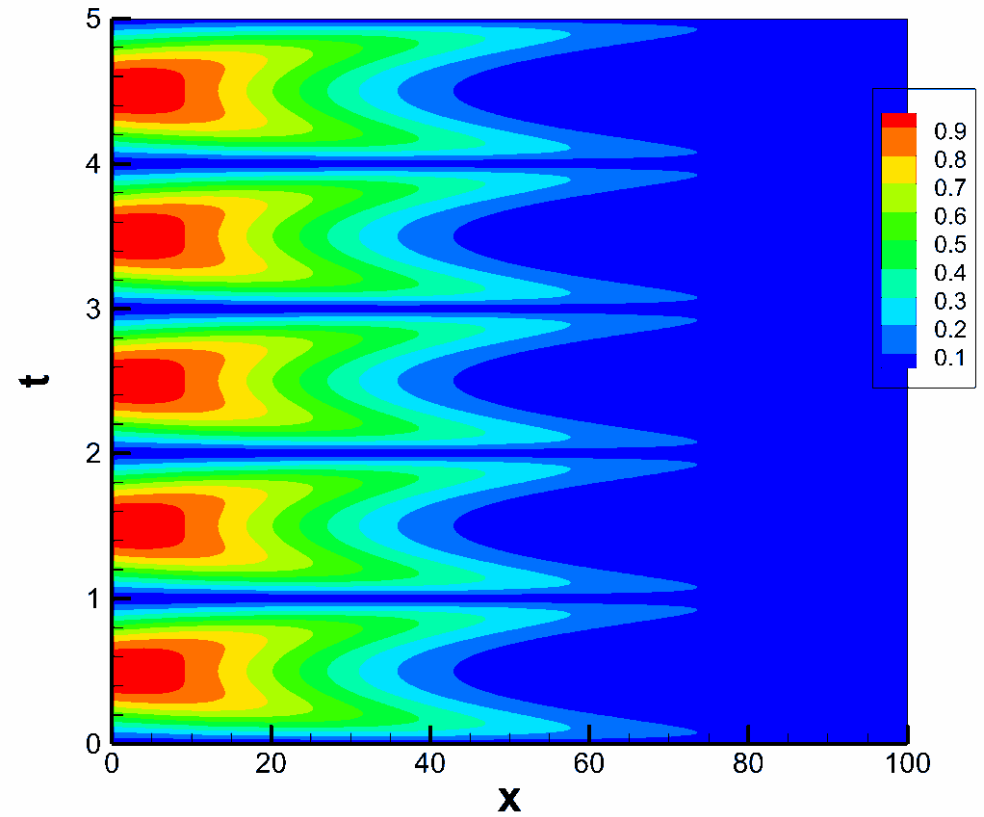


Освещенность и температура

I

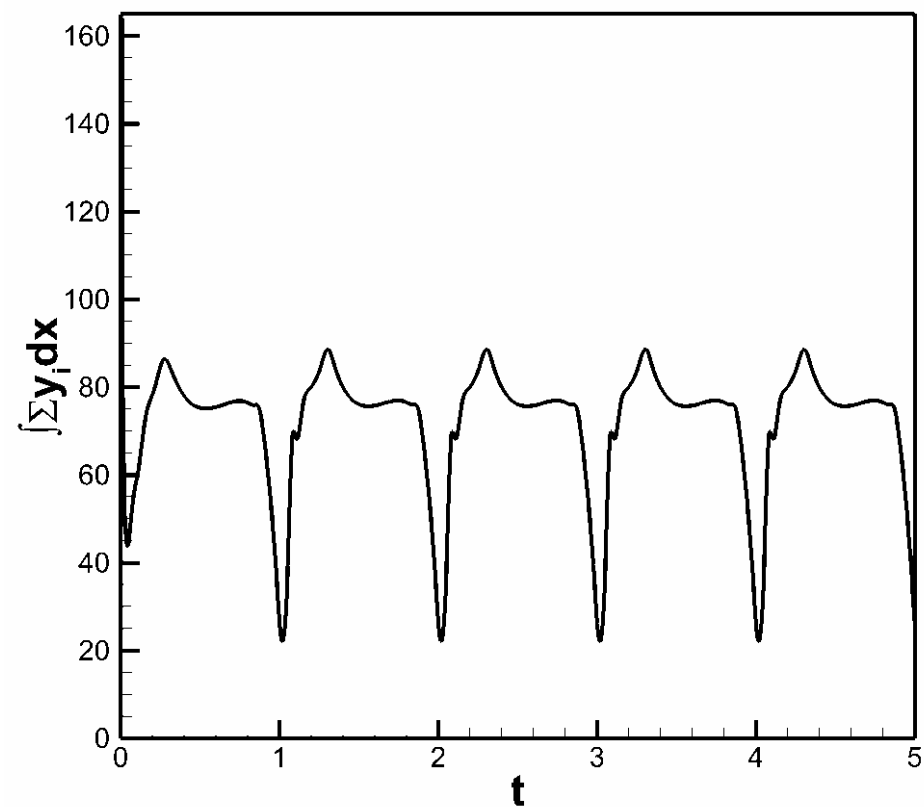
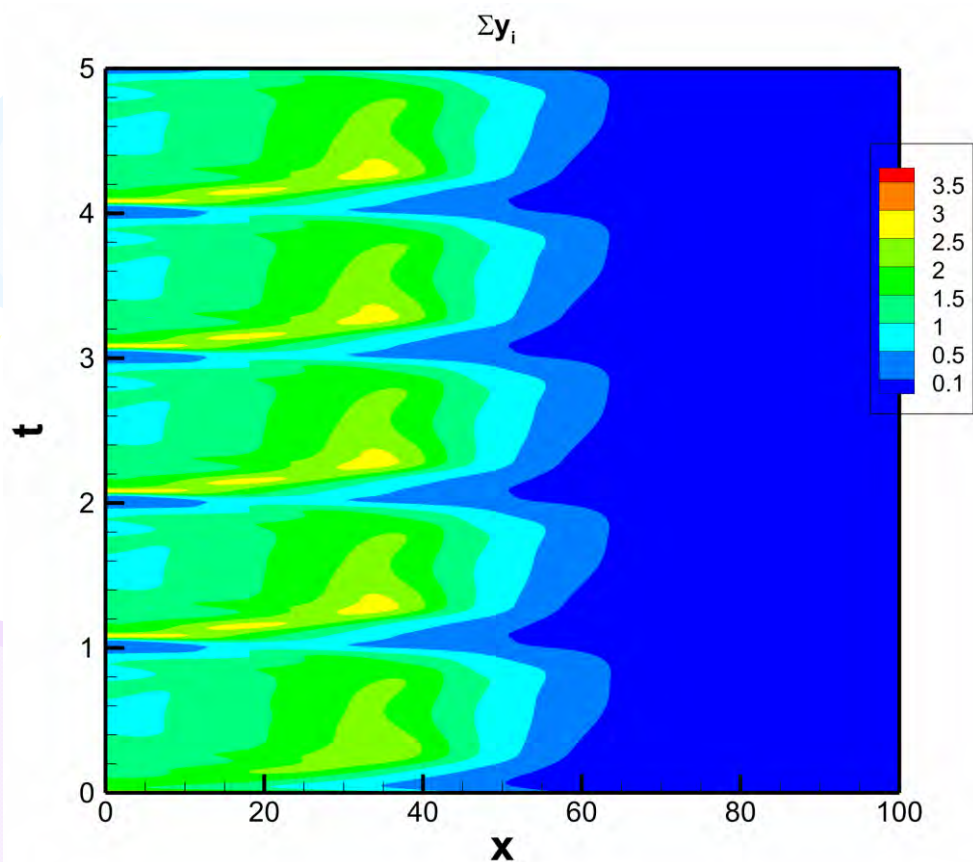


θ



Три группы планктона

Плотность общей биомассы

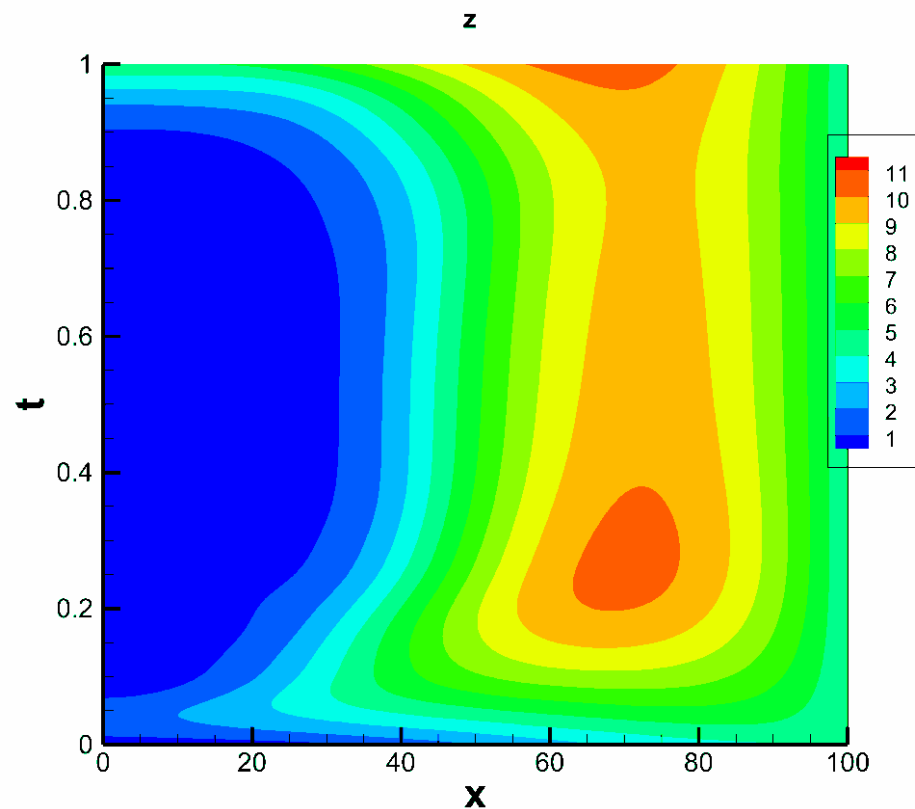
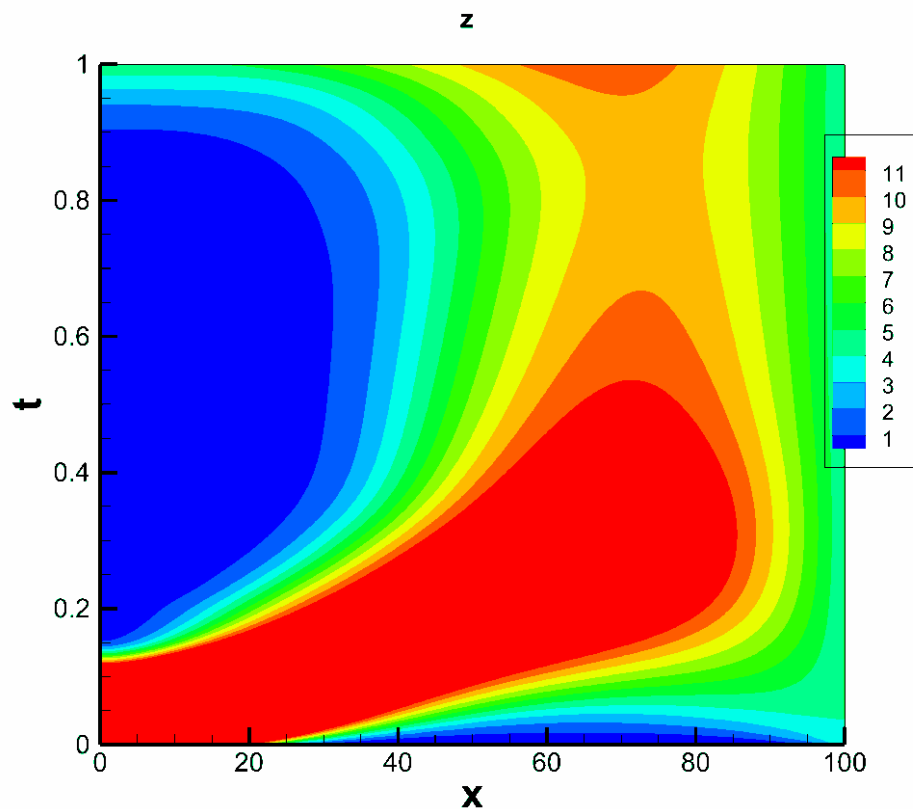


Модельный эксперимент

Питательные вещества

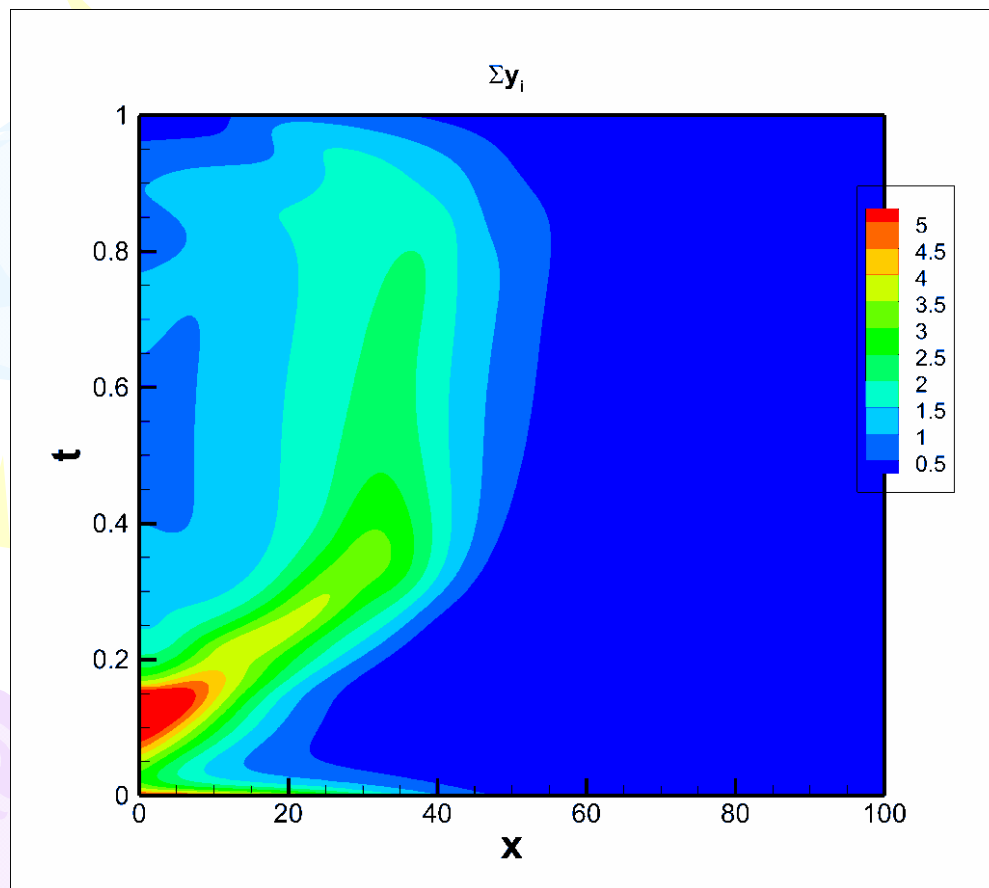
Артефакт

Норма

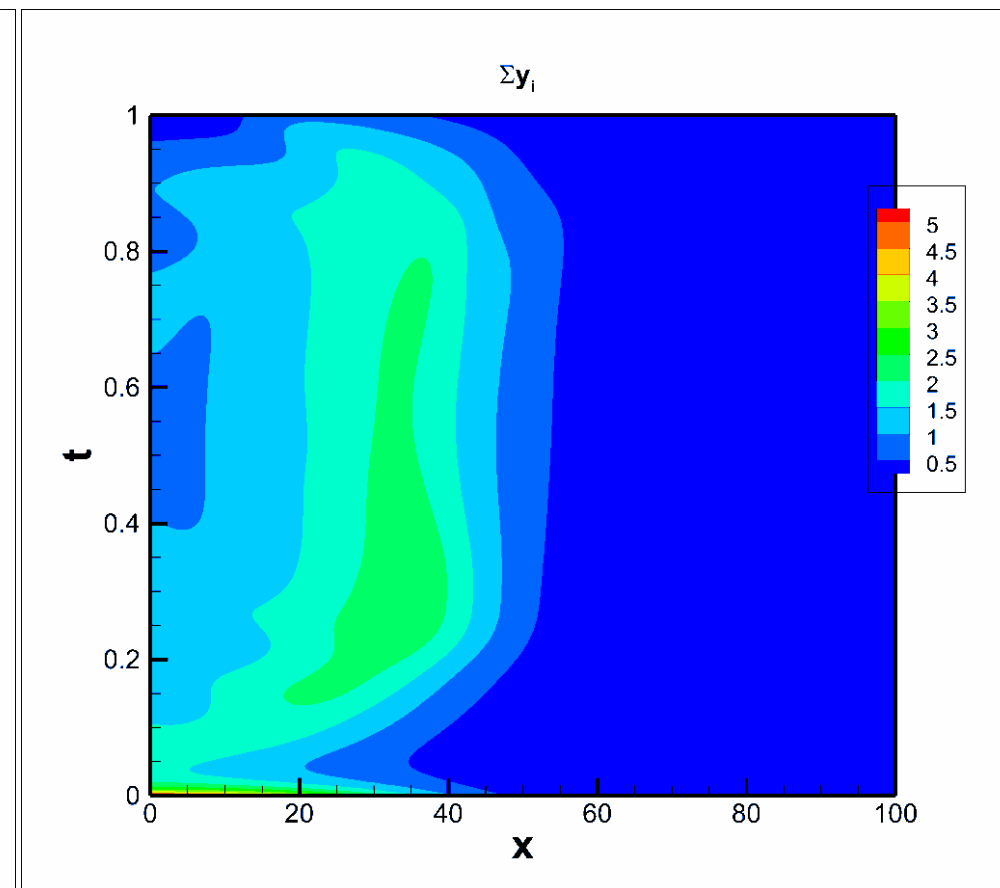


Общее содержание

Артефакт



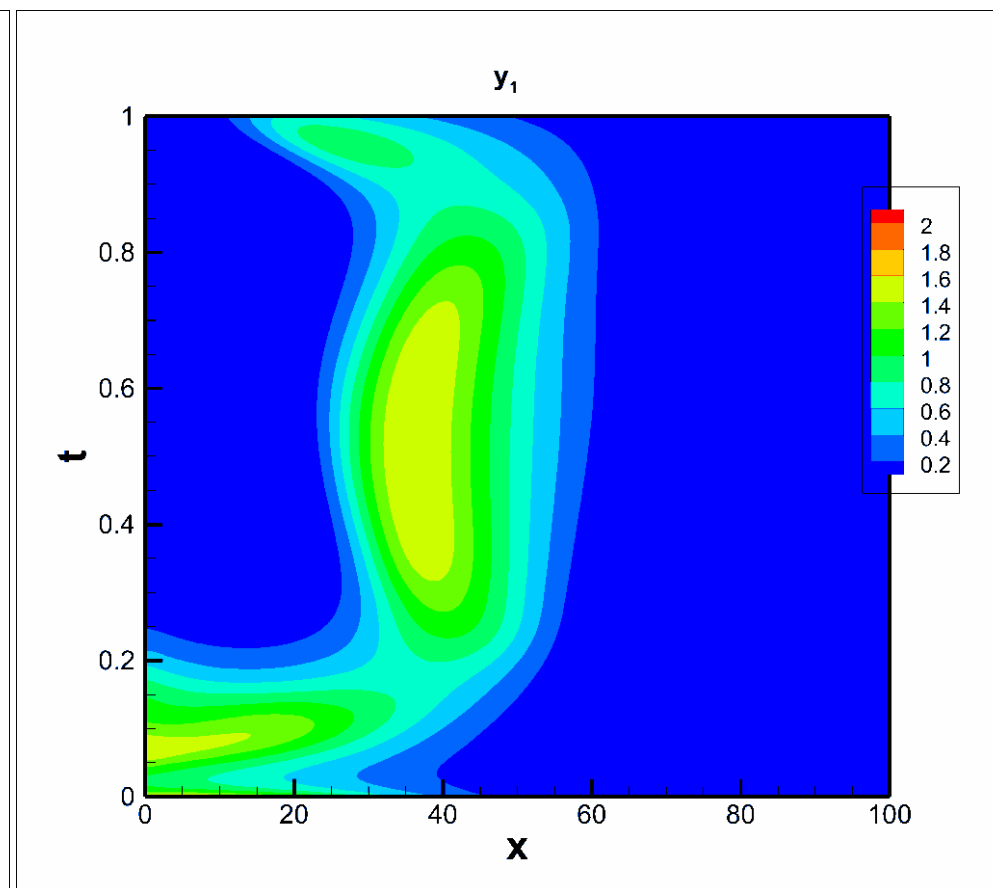
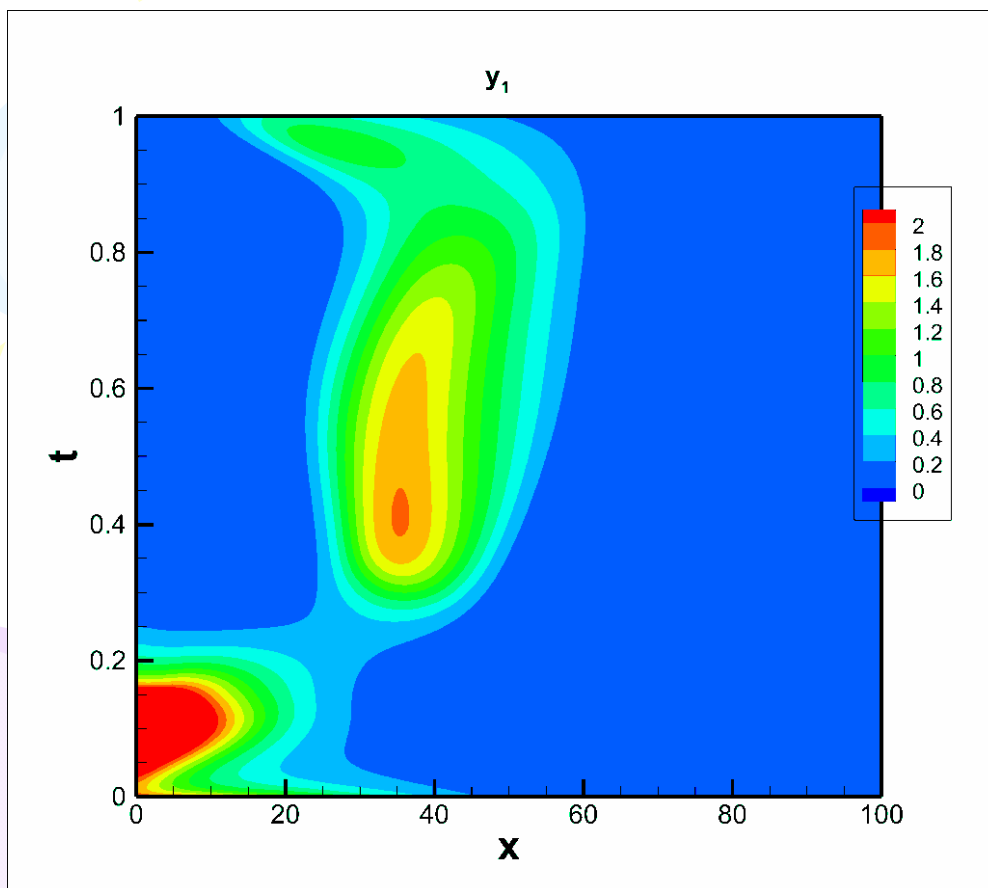
Норма



Холоднолюбивая группа

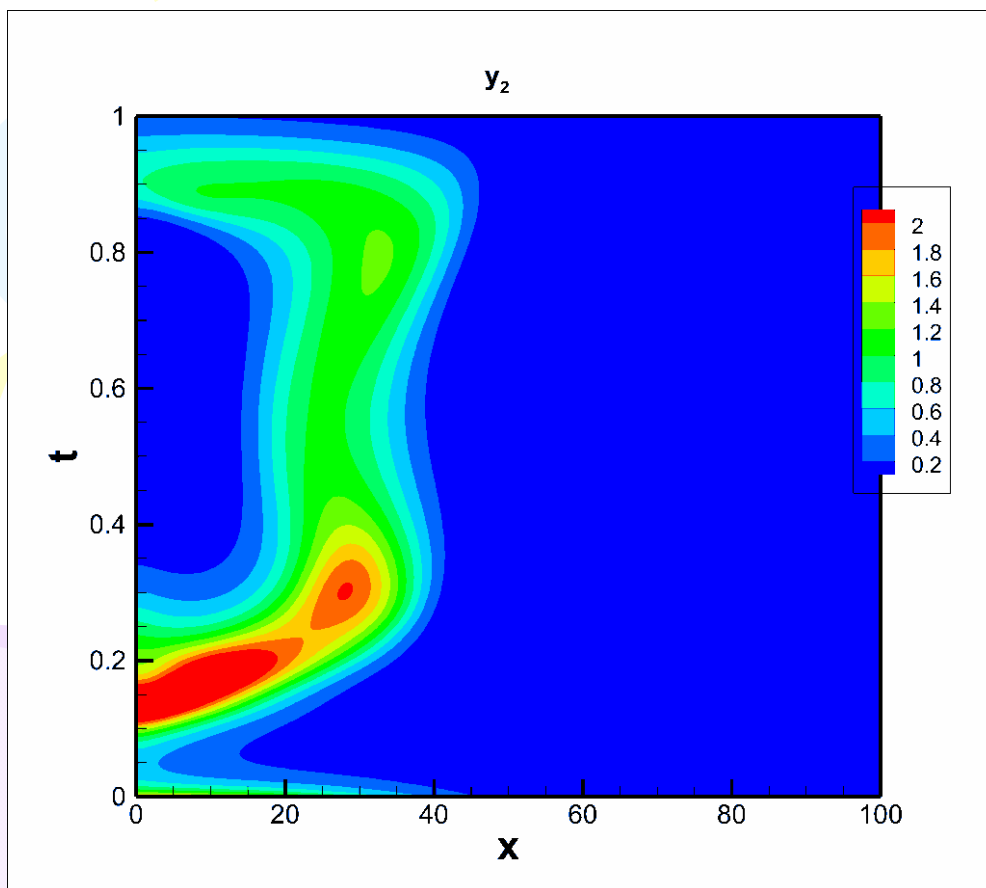
Артефакт

Норма

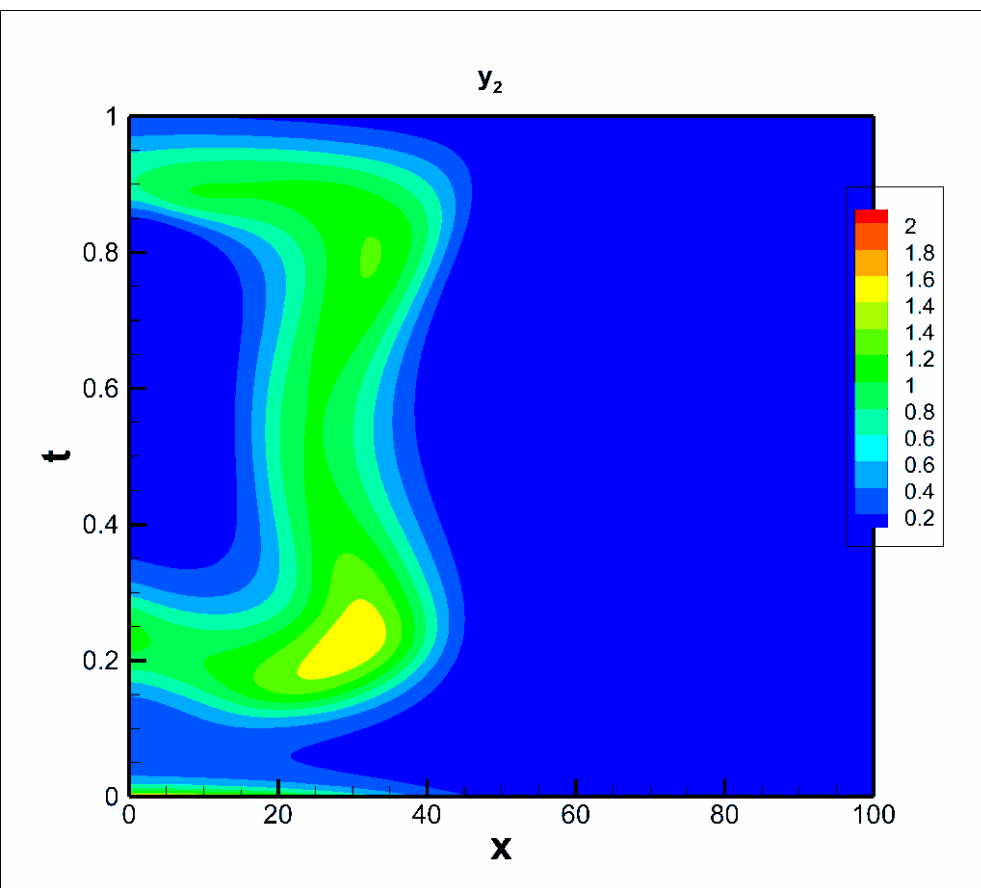


Средняя группа

Артефакт

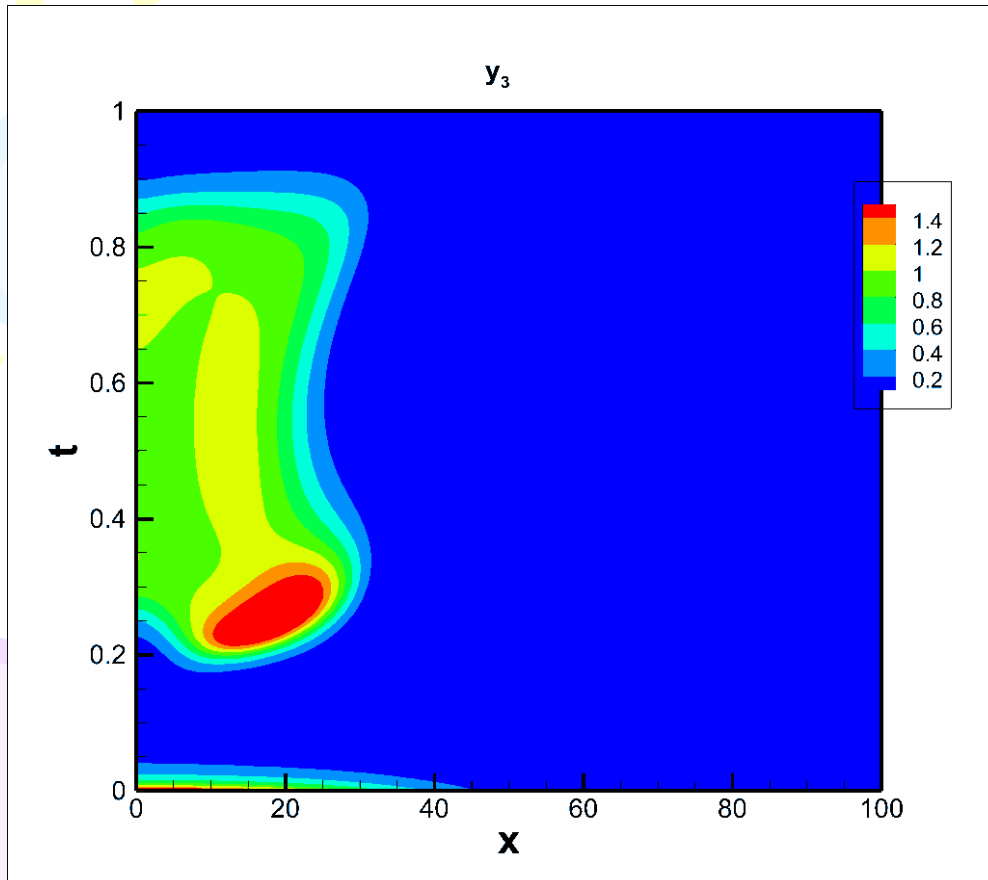


Норма

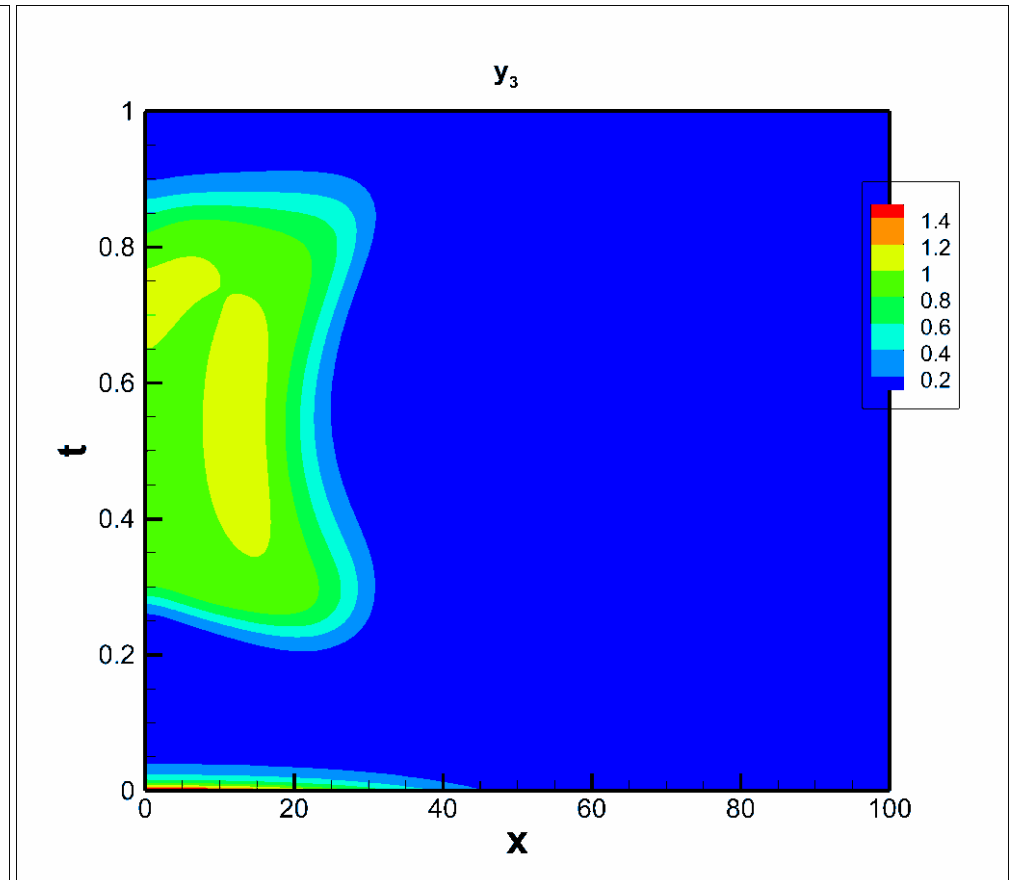


Теплолюбивая группа

Артефакт

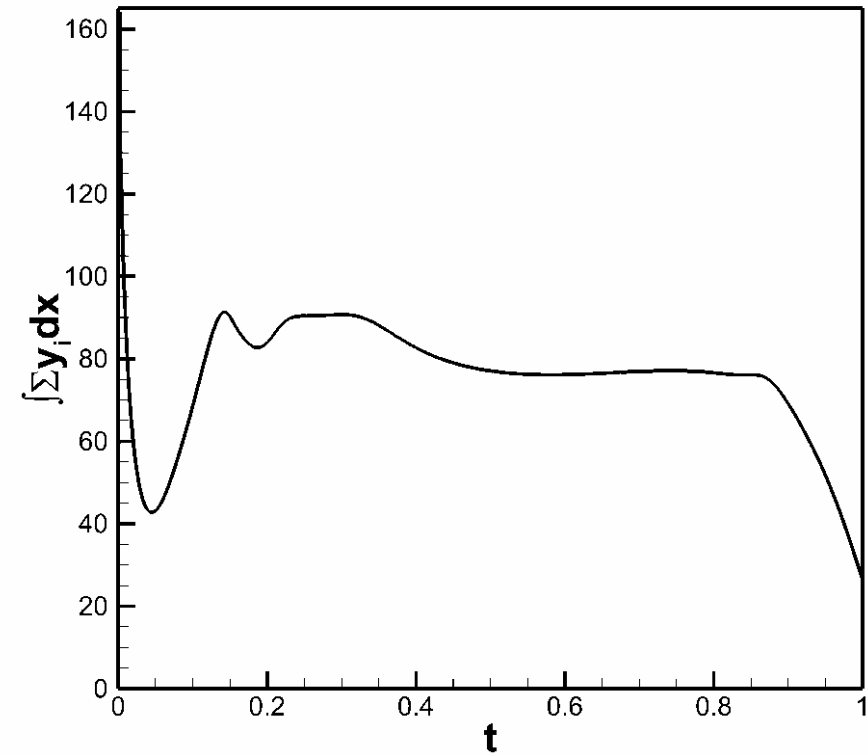


Норма

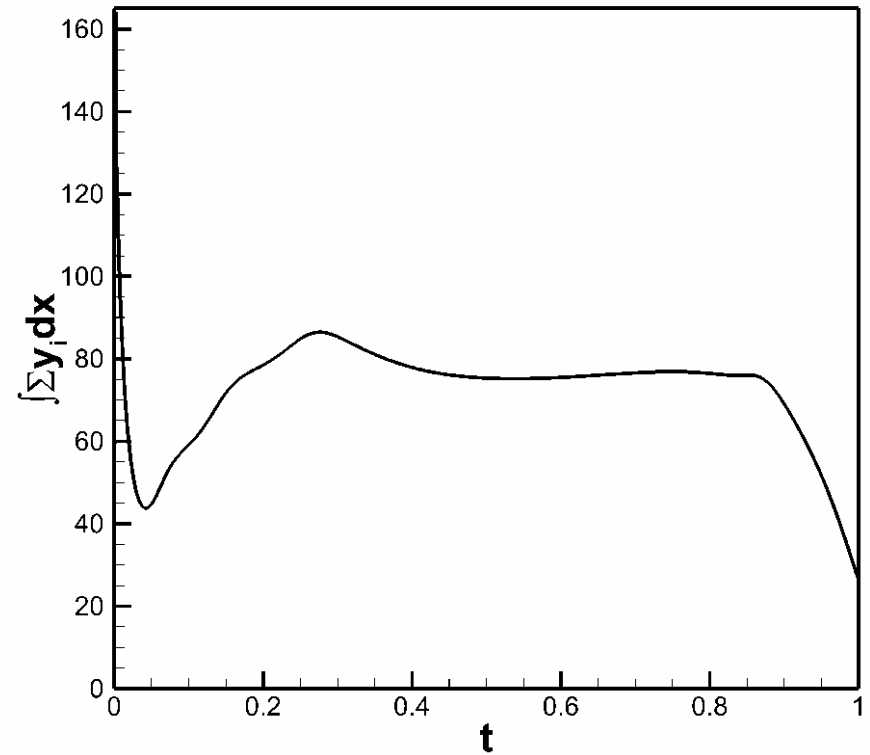


Динамика общей биомассы

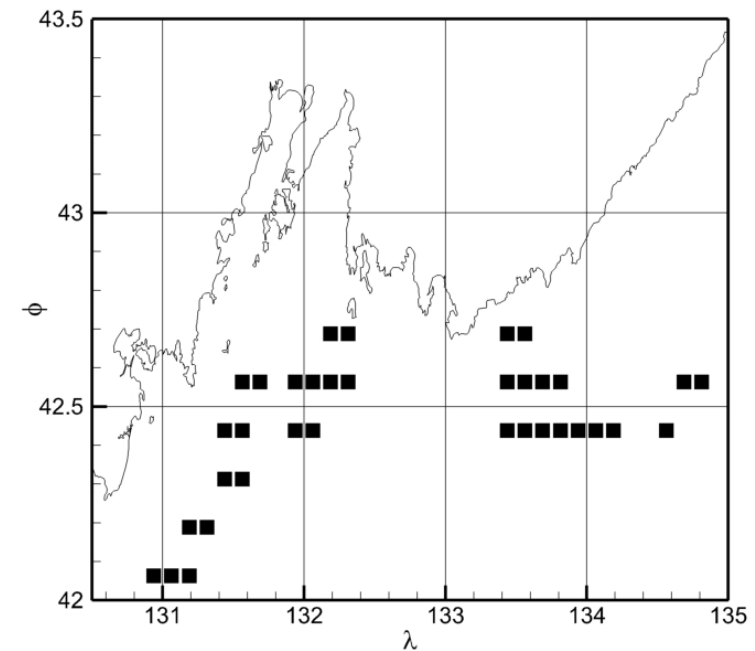
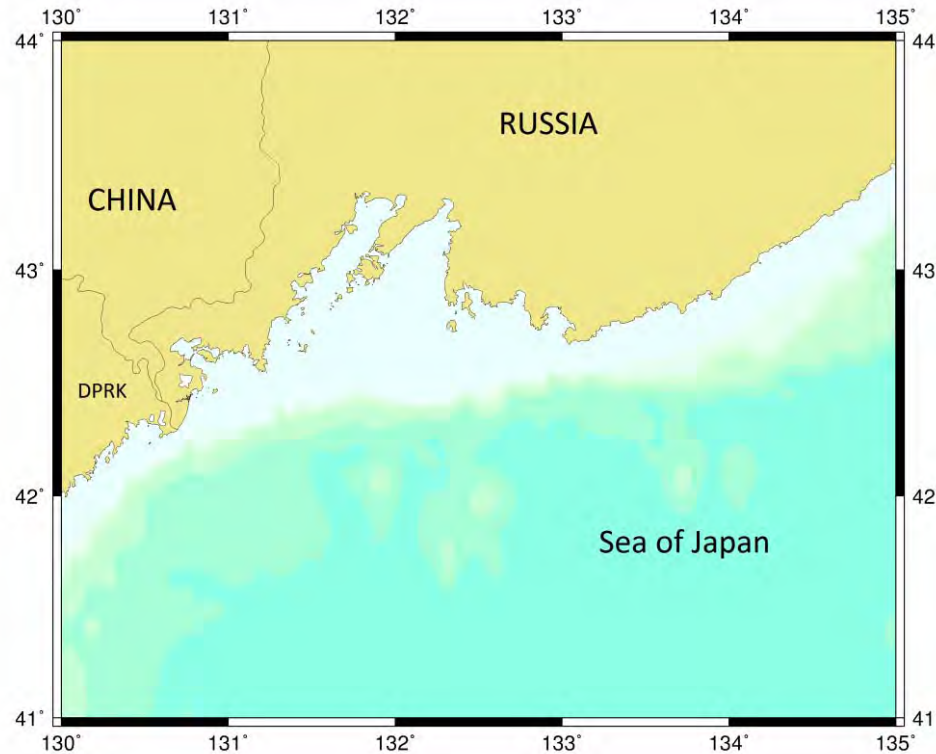
Артефакт



Норма



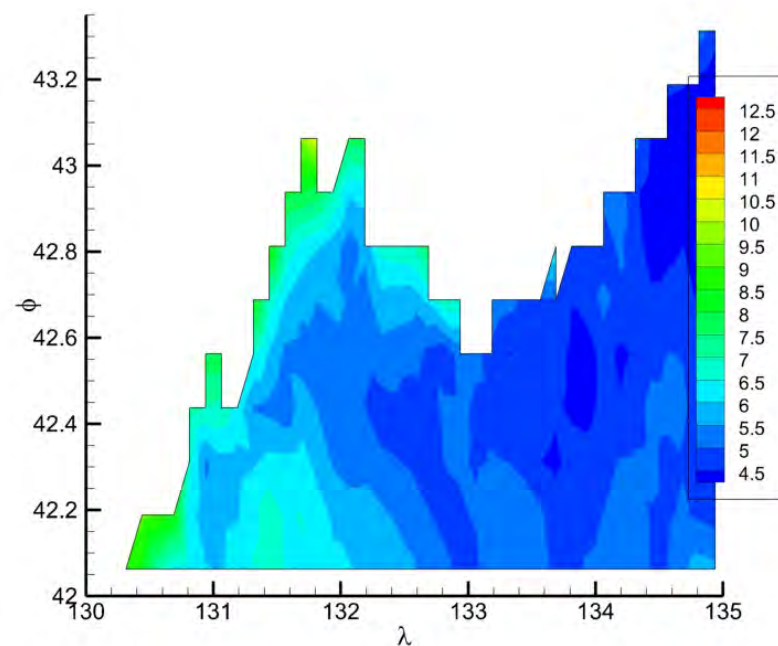
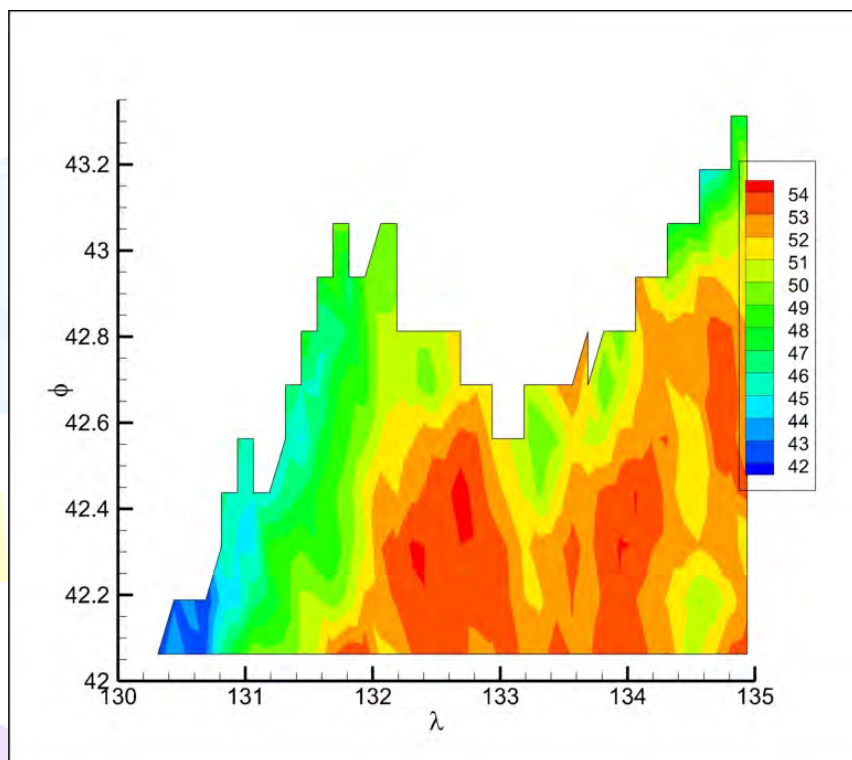
Залив Петра Великого



Изучаемый район и места полноценных данных

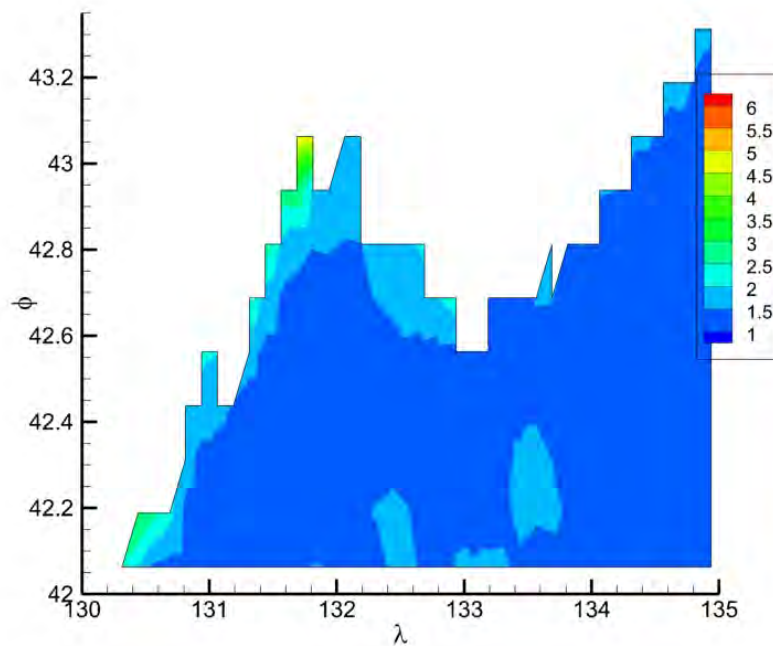
Абакумов А.И., Израильский Ю.Г. Оценка содержания хлорофилла в море по спутниковым данным (залив Петра Великого) // Вестник НГУ (серия: информационные технологии).

Освещенность и температура в апреле 2010 года

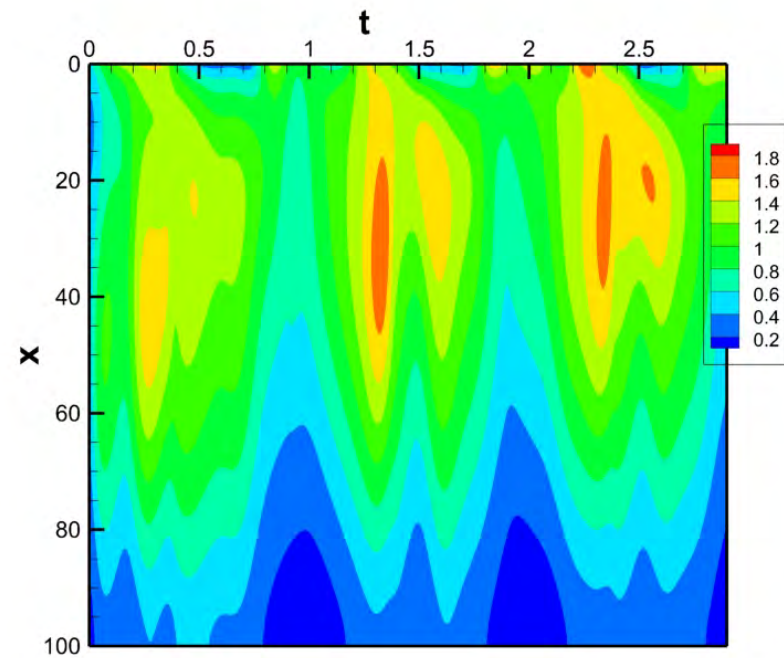


Залив Петра Великого

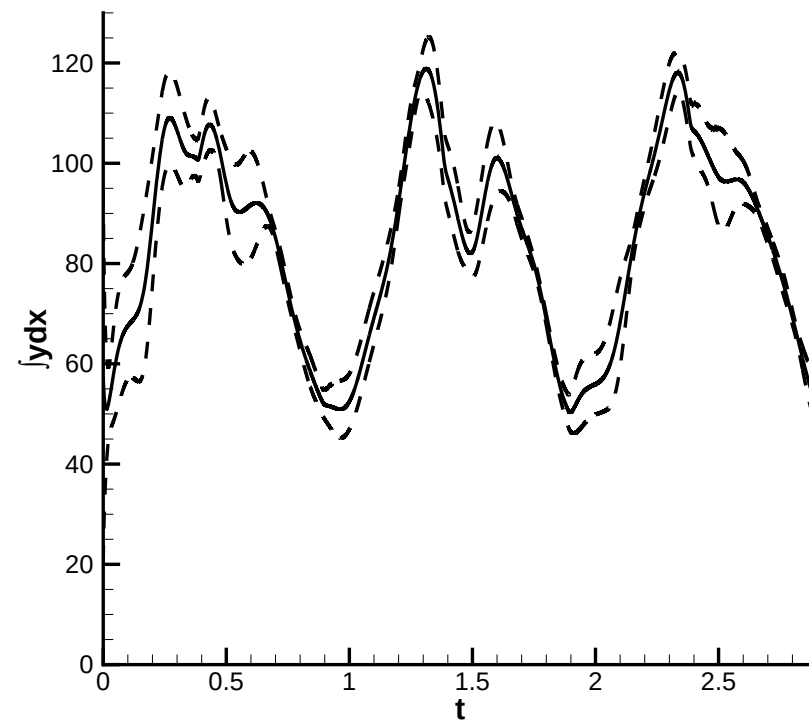
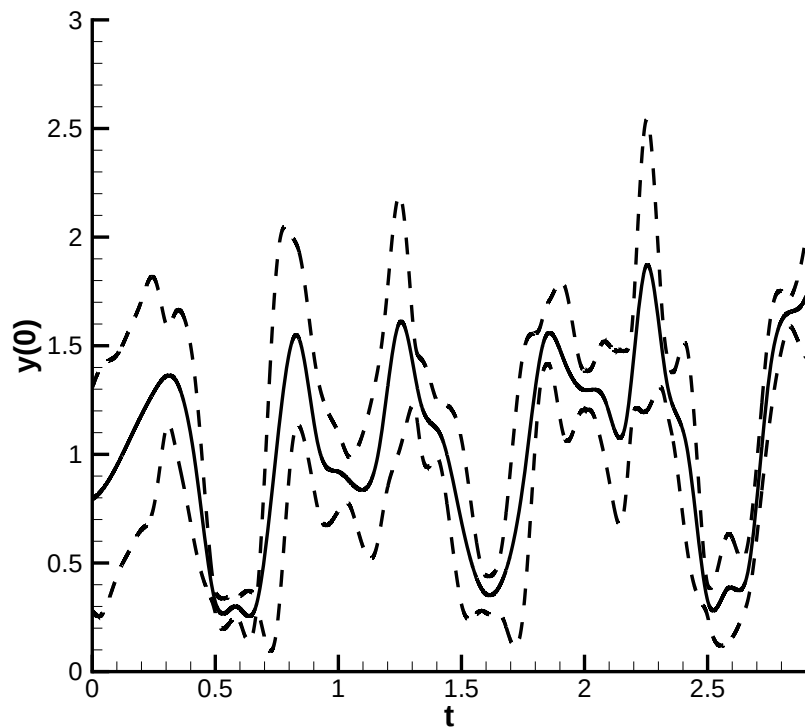
Хлорофилл в заливе ПВ в апреле 2010 года

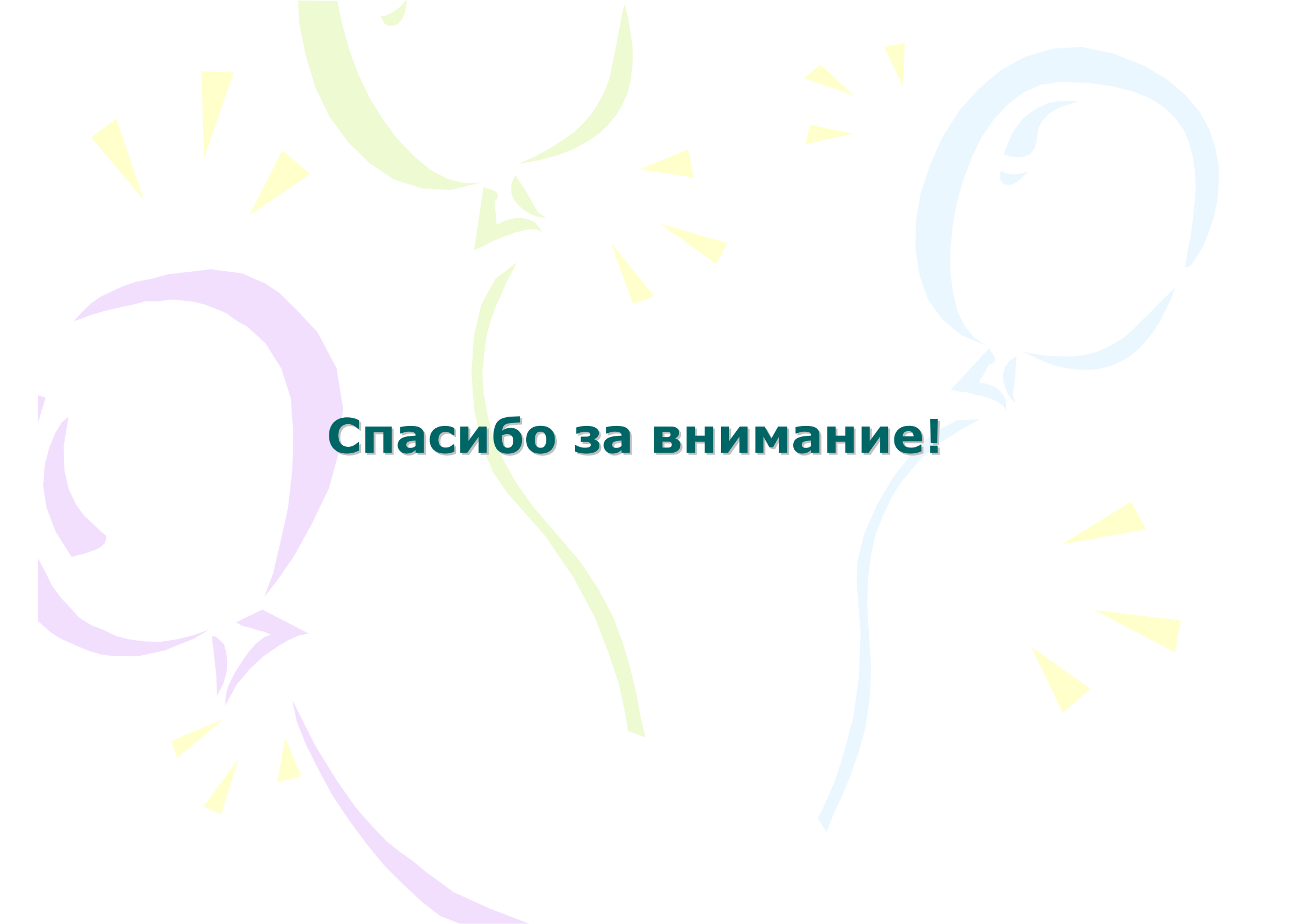


Динамика концентрации хлорофилла в южной части залива



Динамика хлорофилла. Концентрация на поверхности и содержание в толще воды



The background features several large, flowing, abstract shapes in light green, light blue, and light purple. Interspersed among these are numerous small, yellow, starburst-like shapes. The overall aesthetic is clean, modern, and celebratory.

Спасибо за внимание!