Метапопуляционная динамика с учетом межвидового взаимодействия

Кириллов А.Н.

ИПМИ КарНЦ РАН

В ареале (patch) присутствуют $n(t)$ популяций с количественными характеристиками

$$x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n(t)}}$$

Популяция i, присутствующая в ареале, может находиться в одном из состояний:

колонизация (c_i)

взаимодействие - развитие (d_i)

эмиграция (e_i)

Структура ареала $W = (\gamma, s, A)$

Внешняя структура $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$

$\gamma_i = 1$, если популяция i в ареале

$\gamma_i = 0$, иначе

Внутренняя структура $s = (\gamma_1 s_1, \dots, \gamma_N s_N)$

$$s_i = \begin{cases} c_i \\ e_i \\ d_i \end{cases}$$

Структура взаимодействий $A = \{\gamma_i \gamma_j a_{ij}\} = \{b_{ij}\}$

$a_{ij} = 0$ или 1

Динамика структуры

Многозначный оператор F

$$F\colon\ W \to F(W) \subset \{\gamma, s, A\}$$

Траекторный ансамбль

$$\{F^k(W)\},\ \ k \geq 0$$

Задача: исследовать поведение $\{F^k(W)\}$

Динамическая система с переменной структурой, порождающая оператор F

Динамика популяции i

$$\gamma_i \dot{x}_i = \gamma_i f_i^c(b_{11}x_1, \dots, b_{1N}x_N)$$ колонизация

$$\gamma_i \dot{x}_i = \gamma_i f_i^e(b_{11}x_1, \dots, b_{1N}x_N)$$ эмиграция

$$\gamma_i \dot{x}_i = \gamma_i f_i^d(b_{11}x_1, \dots, b_{1N}x_N)$$ взаимодействие развитие

Эволюционное время k_i популяции i

$$R^N = \bigcup_{j=1}^{m_i} \Omega_j^i$$

$$\dot{k}_i = g_j^i(\gamma_1 x_1, \dots, \gamma_N x_N) \qquad x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega_j^i$$

При попадании $x \in \Omega_j^i$ на границу $\partial\Omega_j^i$

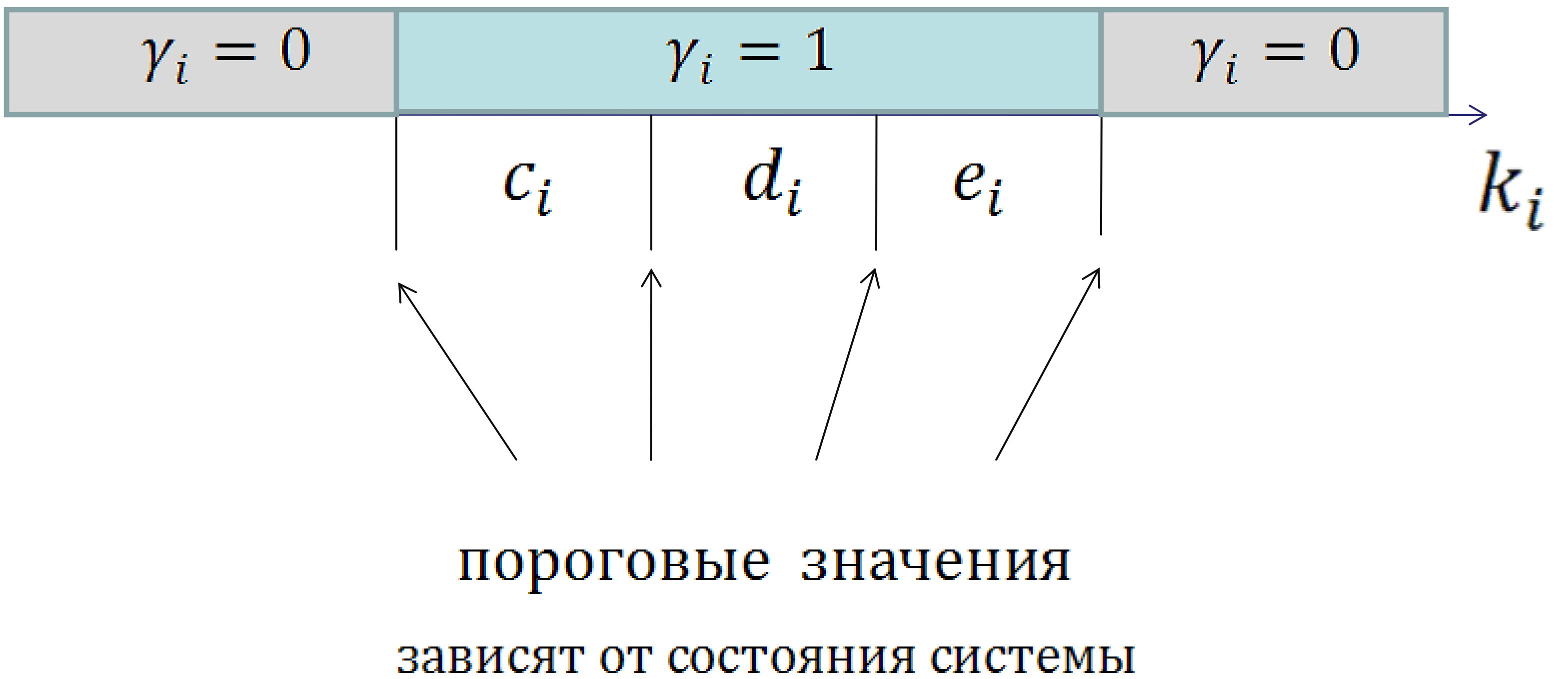
под действие переходного отображения

x переводится в Ω_j^l

$$\dot{k}_i = g_j^l(\gamma_1 x_1, \dots, \gamma_N x_N)$$

Изменение структуры

- Ось эволюционного времени



Динамика (дискретно-непрерывная)

Динамика популяций - процессы колонизации, взаимодействия, эмиграции

$$(x_1, \dots, x_N)$$

Динамика эволюционного времени

$$(k_1, \dots, k_n)$$

Динамика структуры $W = (\gamma, s, A)$

$$W_{n+1} \in F(W_n)$$

Построенная система описывает динамику ареала с переменным количеством $n(t)$ популяций

$$n(t) = \gamma_1 + \cdots + \gamma_N$$

и переменной структурой $W = (\gamma, s, A)$

Изменение структуры происходит при прохождении эволюционным временем $(k_1, \dots, k_n)$ пороговых значений.

Проблема:

моделирование динамики эволюционного времени

Модель ареала со взаимодействием “хищник – жертва”

$x_1, x_2 -$ численности (плотности) популяций жертв, хищников

Миграция популяции хищников

$W_g -$ средний вес особи хищника

Тенденция к миграции $\quad W_g \leq \bar{\lambda}$

Миграция начинается при дополнительных условиях

Индивидуальный декремент $\quad \bar{W} = W_g - \bar{\lambda}$

Условия миграции особи хищника

$$\bar{\bar{\lambda}} + \int_{t_0}^{t} \bar{W}(\tau)\, d\tau \leq \bar{\Lambda}$$

Условия миграции популяции хищников

$$k_2(t) = k_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} x_2(\tau)\bar{W}(\tau)\, d\tau \leq \Lambda$$

$k_2(t)$ - эволюционное время
популяции хищников -
пищевая привлекательность ареала

$k_1(t)$ - эволюционное время
популяции жертв
постоянно – жертва не мигрирует

Динамика эволюционного времени

$$\dot{k}_1 = 0 \qquad \dot{k}_2 = x_2 \overline{W}$$

Пусть вес особи хищника имеет вид

$$W_g(t) = \lambda_1 \cdot \frac{x_1(t)}{x_2(t)}, \qquad \frac{x_1(t)}{x_2(t)} \le const$$

$$W_g(t) = const, \qquad \frac{x_1(t)}{x_2(t)} > const$$

Тогда $$\dot{k}_2 = x_1 - \lambda x_2 \qquad \lambda = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1}$$

Пусть $k_2(t) = n(t)$

Динамика популяций

$$n > \Lambda:\ \dot{x}_1 = x_1(a - bx_2),\ \ \dot{x}_2 = x_2(kbx_1 - m),\ \ \dot{n} = x_1 - \lambda x_2 \quad (P_2)$$

$$n \le \Lambda, x_2 > \tilde{\varepsilon}(x_1):\ \ \dot{x}_1 = ax_1,\quad \dot{x}_2 = -mx_2 \quad \dot{n} = x_1 - \lambda x_2 \quad (P_{21})$$

$$n \le \Lambda, x_2 < \tilde{\varepsilon}(x_1):\ \ \dot{x}_1 = 0,\quad \dot{x}_2 = -c \quad \dot{n} = 0 \quad (P_-)$$

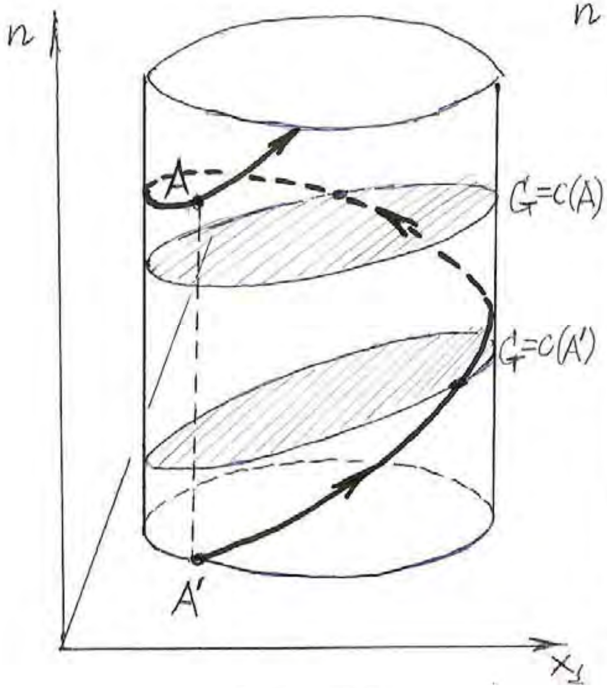
$$n < \Lambda, x_2 = 0:\quad \dot{x}_1 = ax_1,\quad \dot{x}_2 = 0,\quad \dot{n} = x_1 \quad (P_1)$$

$$n = \Lambda,\ \ x_2 \le \tilde{\varepsilon}(x_1):\ \ \dot{x}_1 = 0,\quad \dot{x}_2 = c \quad \dot{n} = 0 \quad (P_+)$$

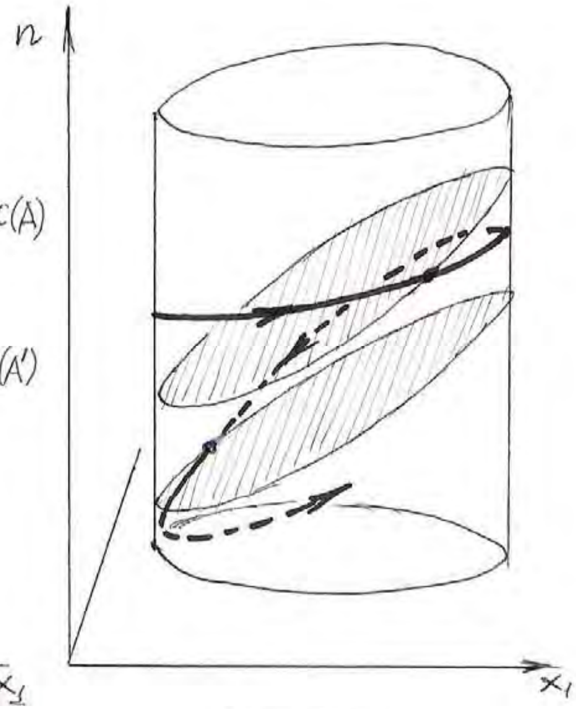
$$\tilde{\varepsilon}(x_1) = \varepsilon\lambda, \quad \text{если } x_1 \ge \varepsilon\lambda,$$

$$\tilde{\varepsilon}(x_1) = \frac{1}{\lambda}\varepsilon x_1, \quad \text{если } 0 < x_1 < \varepsilon\lambda$$

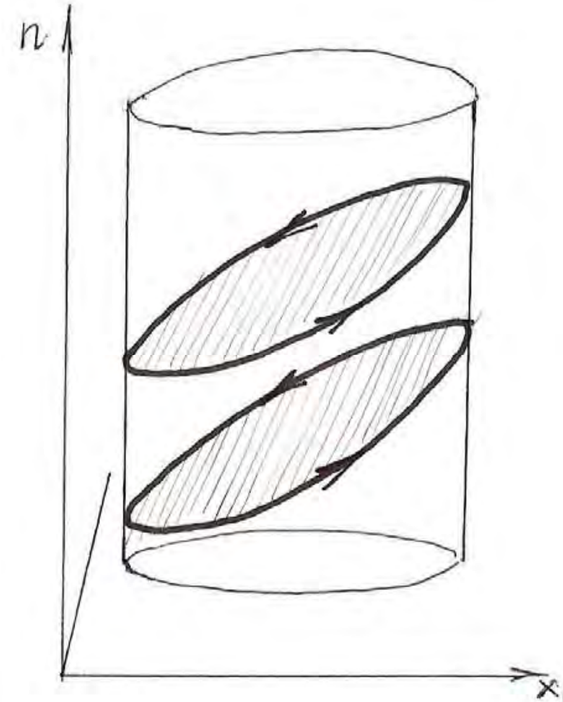
Режимы	Внутренняя структура	Внешняя структура
P_2 – взаимодействие	$s = (d_1, d_2)$	$\gamma = (1,1)$
P_{21} – развитие популяции жертвы эмиграция популяции хищника P_- – завершение эмиграции	$s = (d_1, e_2)$	$\gamma = (1,1)$
P_1 – развитие популяции жертвы в отсутствие хищников	$s = (d_1, 0)$	$\gamma = (1,0)$
P_+ – колонизация	$s = (d_1, c_1)$	$\gamma = (1,1)$



$\gamma < \frac{m}{a\kappa}$



$\gamma > \frac{m}{a\kappa}$



$\gamma = \frac{m}{a\kappa}$

Динамика популяций и структур

Теорема 1. $\lambda < \dfrac{m}{ak} \Rightarrow \forall M_0(x_{10}, x_{20}, n_0) \quad \exists T(M_0)$ при $t > T(M_0)$

$$\boxed{P_2}$$

Теорема 2. $\lambda = \dfrac{m}{ak} \Rightarrow \forall M_0 \notin O_1 q \cup Eq \quad \exists T(M_0)$: при $t > T(M_0)$

$\boxed{P_2}$ или $\boxed{P_2 P_{21}}$

$Eq = \{(x_1, x_2, n): n > \Lambda, x_1 = \dfrac{m}{bk}, x_2 = \dfrac{a}{b}\}$ равновесия Вольтерра

$O_1 q = \{(x_1, x_2, n): n = \Lambda, \quad x_1 - \lambda x_2 = 0,\ x_1 > \dfrac{m}{bk}, x_2 > \dfrac{a}{b}\}$

устойчивые равновесия

Теорема 3. $\lambda > \dfrac{m}{ak} \Rightarrow \quad \forall M_0 \in O_1 h$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \infty} \qquad i = 1{,}2$$

$$O_1 h = \{(x_1, x_2, n) : n = \Lambda, x_1 - \lambda x_2 = 0, x_2 > \varepsilon\}$$

луч скольжения

$M_0 \notin O_1 h \quad \Rightarrow$ периодический режим $P_2 P_{21}$

с выходом в режим P_1 при малых x_1, x_2

Экологический смысл

$\lambda < \dfrac{m}{ak}$ – с некоторого момента времени миграция прекратится

ареал привлекателен

$\lambda = \dfrac{m}{ak}$ – периодические режимы $P_2 P_{21}$ (вторичная миграция)

или вольтеровские режимы P_2

$\lambda > \dfrac{m}{ak}$ – активная миграция с возможностью полного ухода

ареал непривлекателен

$\dfrac{1}{\lambda}$ – показатель пищевой привлекательности

ареала для популяции хищника

- Модель с самолимитированием популяции жертвы:

$$\dot{x}_1 = x_1(a - cx_1)$$

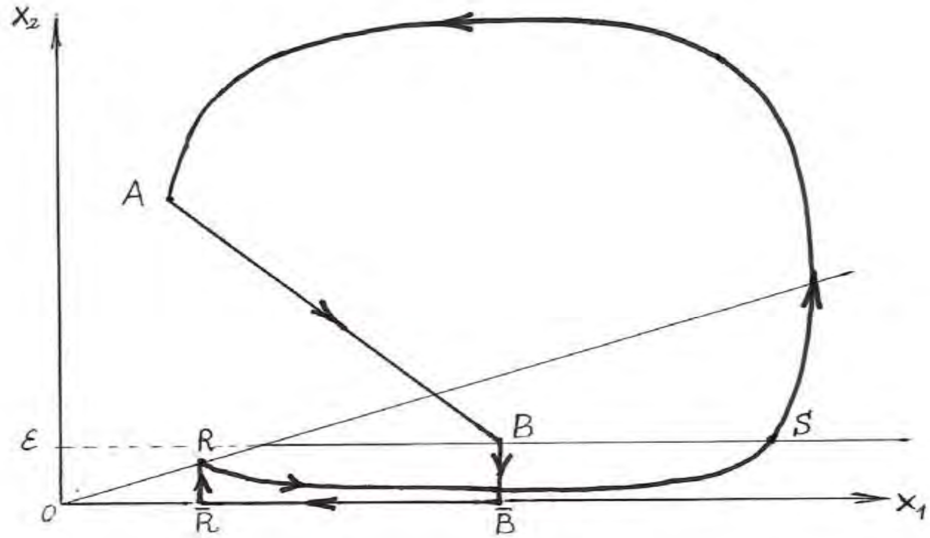
- Исследована возможность полной вторичной миграции. Найдены условия существования периодических режимов.

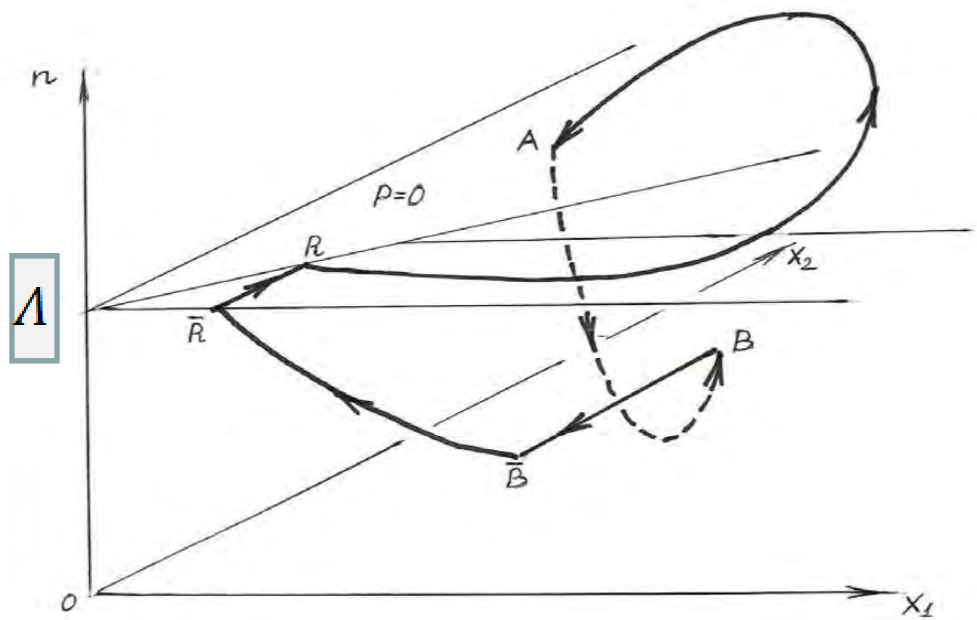
Теорема. $\lambda > \dfrac{m}{ak} \Rightarrow$ в режиме полной вторичной миграции

существует периодический структурный режим

$$(P_1 P_2 P_{21})$$

$$\text{полная миграция} - \text{выход в режим } P_1$$


x_2
A
B
ε
R
S
0
$\bar{R}$
$\bar{B}$
x_1


n
A
P=0
R
x_2
Λ
$\bar{R}$
B
$\bar{B}$
0
x_1

Выводы

В отличие от классической модели Вольтерра и основанных на ней моделях, предложенная модель позволяет исследовать устойчивость не только равновесных состояний, но и структурных траекторий. При этом системе Вольтерра соответствует одна из структур, устойчивая при некоторых условиях.

Подход к моделированию позволяет исследовать основные задачи теории метапопуляций: миграцию, колонизацию исчезновение, выживаемость.

Показана возможность колебания структур, описывающих взаимодействие и миграцию.

Из полученных результатов следует, что миграция может как стабилизировать режим взаимодействия, так и нарушить его устойчивость. В работах Ю.М.Свирежева этот результат получен в локальном случае с помощью методов линеаризации и малого параметра. Для предложенной модели все результаты носят глобальный характер как для структур, так и для равновесий.