

**Третья национальная научная конференция
с международным участием
«Математическое моделирование в экологии»**

21-25 октября 2013 г.

Пущино

**МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВЕСЕННЕЙ
ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ
РЫЖЕЙ ПОЛЕВКИ (*Myodes glareolus*):
*результаты аналитического
и численного исследования***

Г.П. Неверова¹, О.А. Жигальский², Е.Я. Фрисман¹

¹ *Институт комплексного анализа региональных
проблем ДВО РАН, Биробиджан*

² *Институт экологии растений и животных УрО РАН, Екатеринбург*



Myodes glareolus

ХАРАКТЕРИСТИКА ВИДА

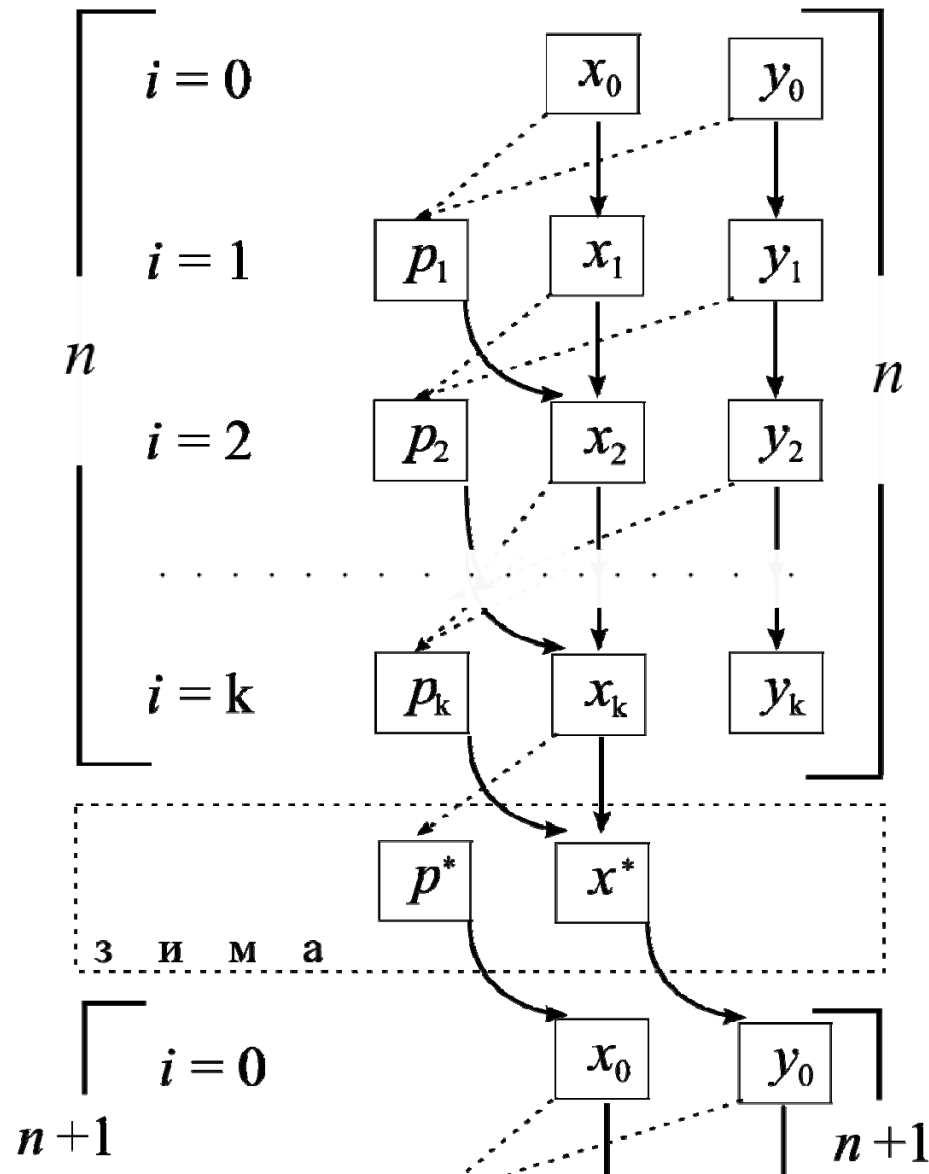
Рыжая полевка (*Myodes glareolus*) - мелкий мышеобразный грызун. Период размножения начинается в апреле, иногда ещё под снегом, и заканчивается в августе - сентябре. Самка приносит по 5-6 детёнышей в каждом помете (максимум до 10-13).

В течение сезона размножения подростки вступают в размножение и приносят потомство. Для популяции рыжей полевки отмечается снижение рождаемости с ростом плотности, а также переход от сезонного воспроизводства к стратегии постоянного размножения.



Myodes glareolus

ЖИЗНЕННЫЙ ЦИКЛ РЫЖЕЙ ПОЛЕВКИ



i - номер интервала

n - номер сезона размножения

p - неполовозрелые сеголетки

x - половозрелые сеголетки

y - перезимовавшие половозрелые особи

..... - рождаемость

— - процессы смертности

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ (1)

$$\begin{cases} x_{n+1} = \bar{r}_1 x_n + \bar{r}_2 y_n \\ y_{n+1} = \bar{s} \cdot x_n + \bar{v} \cdot y_n \end{cases} \quad (1)$$

n – номер периода размножения,

x – численность особей, рожденных под снегом
(половозрелые сеголетки),

y – численность взрослых особей (перезимовавшие
половозрелые особи),

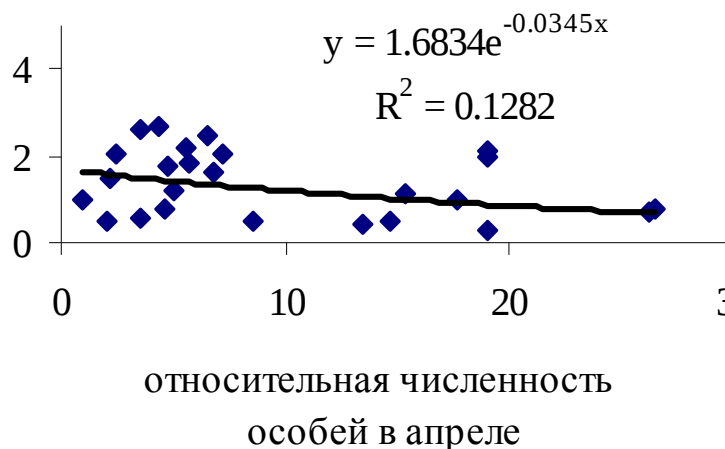
$\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ характеризуют репродуктивные способности
возрастных групп с учетом выживаемости молодежи,

$\bar{s}$ и $\bar{v}$ выживаемость особей, соответствующих
возрастных групп

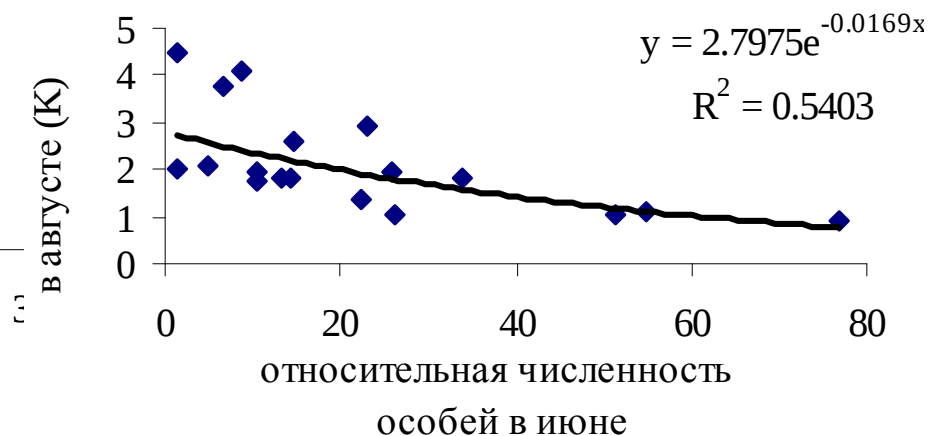
ПЛОТНОСТНАЯ РЕГУЛЯЦИЯ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ РЫЖЕЙ ПОЛЕВКИ

Многолетние учеты численности рыжих полевок на территории Удмуртского стационара, расположенного в бореальной зоне липово-пихтово-еловых подтаежных лесов (57°20' с.ш., 52° в.д.). Отловы полевок проводили регулярно 4 раза в год (апрель, июнь, август, октябрь).

коэффициент,
характеризующий
рождаемость особей
в июне (K)



$$K_{июнь} = \frac{N_{1-2}^{июнь}}{N^{апрель}}$$



$$K_{август} = \frac{N_{1-2}^{август}}{N^{июнь}}$$

N_{1-2} относительная численность особей в возрасте от 1 до 2 месяцев

N относительная общая численность популяции

*Зависимость рождаемости особей от общей численности популяции
(на основе данных О.А. Жигальского)*

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ (2)

$$\begin{cases} x_{n+1} = (r_1 x_n + r_2 y_n) f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = s \cdot x_n + v \cdot y_n \end{cases} \quad (2)$$

Функция $f(x_n, y_n)$ описывает воздействие плотностно-зависимых факторов на воспроизводительные способности половозрелых особей и выбрана по аналогии с моделью Рикера:

$$f(x_n, y_n) = e^{-\beta \cdot x - \gamma \cdot y}$$

β и γ характеризуют интенсивность влияния численности разных возрастных групп на процессы воспроизводства

Предполагается, что функция $f(x_n, y_n)$ монотонно убывает и стремится к нулю при бесконечном возрастании каждого из аргументов.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ (3)

$$\begin{cases} x_{n+1} = (r_1 x_n + r_2 y_n) \cdot e^{-\beta \cdot x_n - \gamma \cdot y_n} \\ y_{n+1} = s \cdot x_n + v \cdot z_n \end{cases} \quad (3')$$

Замена переменных

$$\gamma \cdot x \rightarrow x \quad \gamma \cdot y \rightarrow y \quad a_1 = r_1 \quad a_2 = sr_2 \quad \rho = \frac{\beta}{s\gamma}$$

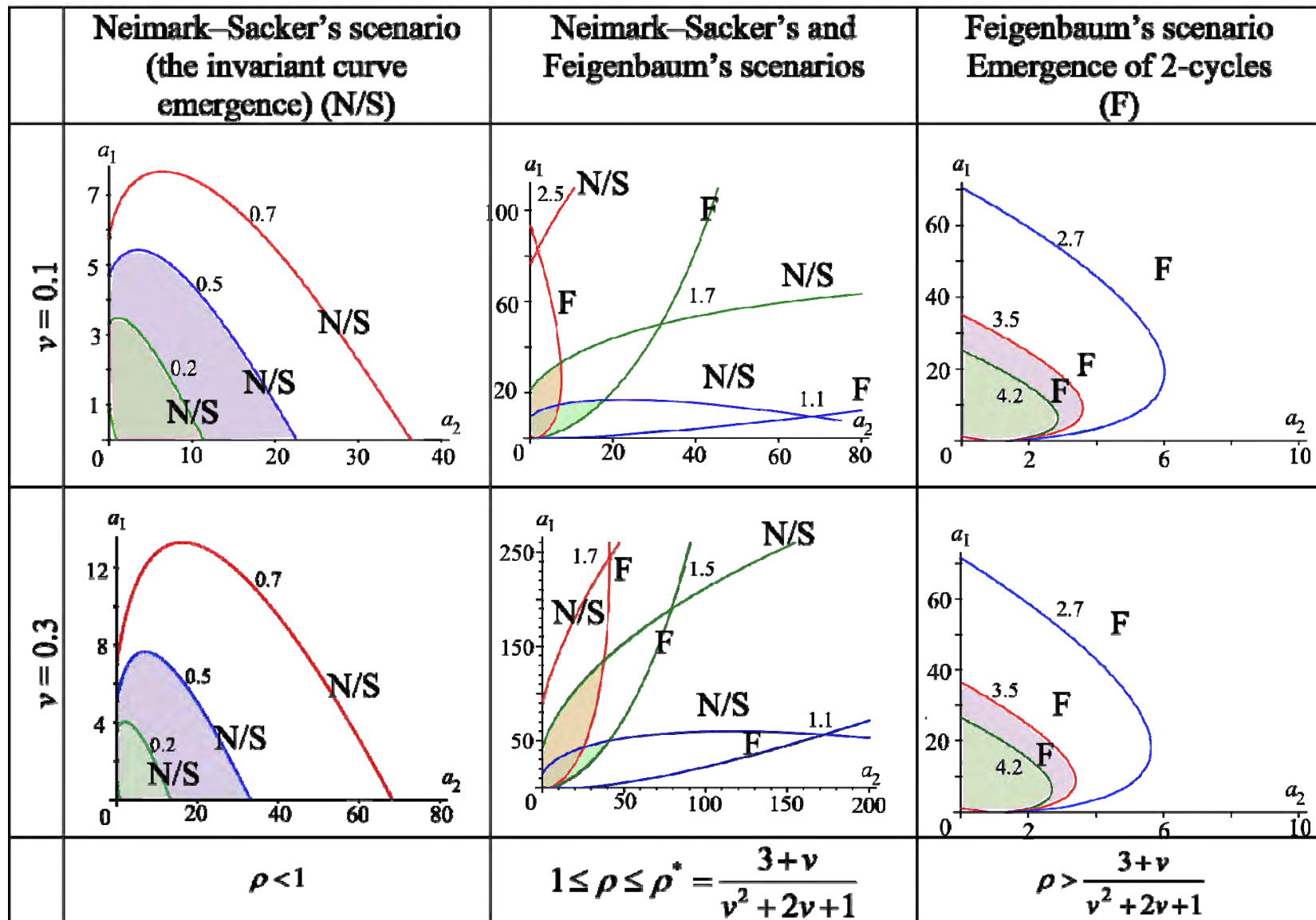
позволяет свести модель (3') к четырехпараметрической

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a_1 x_n + a_2 y_n) e^{-\rho \cdot x_n - y_n} \\ y_{n+1} = x_n + v \cdot y_n \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) имеет единственное нетривиальное решение

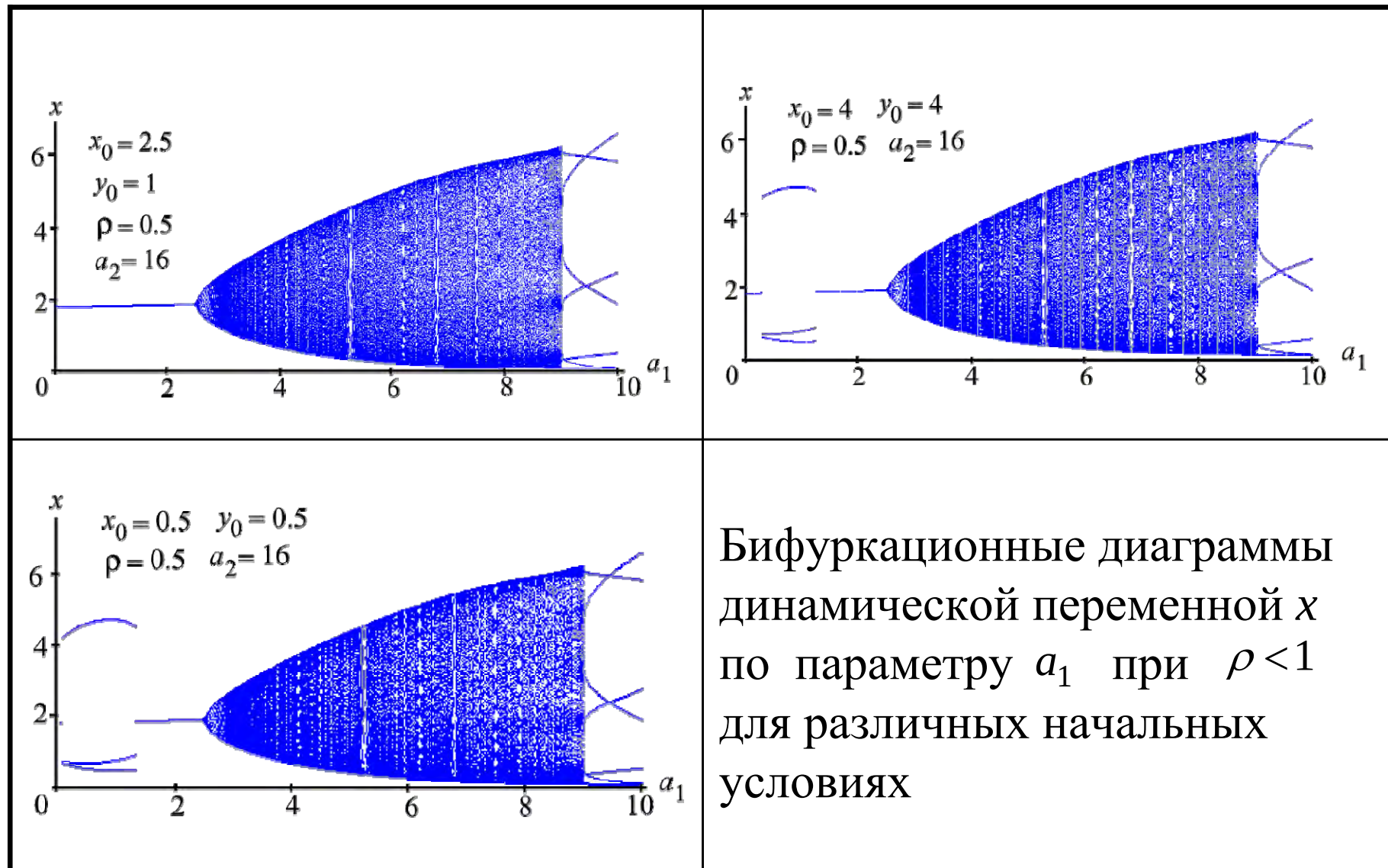
$$\bar{x} = \frac{1-v}{1+\rho(1-v)} \ln \left(\frac{a_1 + a_2 - a_1 v}{1-v} \right) \quad \bar{y} = \frac{1}{1+\rho(1-v)} \ln \left(\frac{a_1 + a_2 - a_1 v}{1-v} \right)$$

ИЗМЕНЕНИЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНОГО РЕШЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ



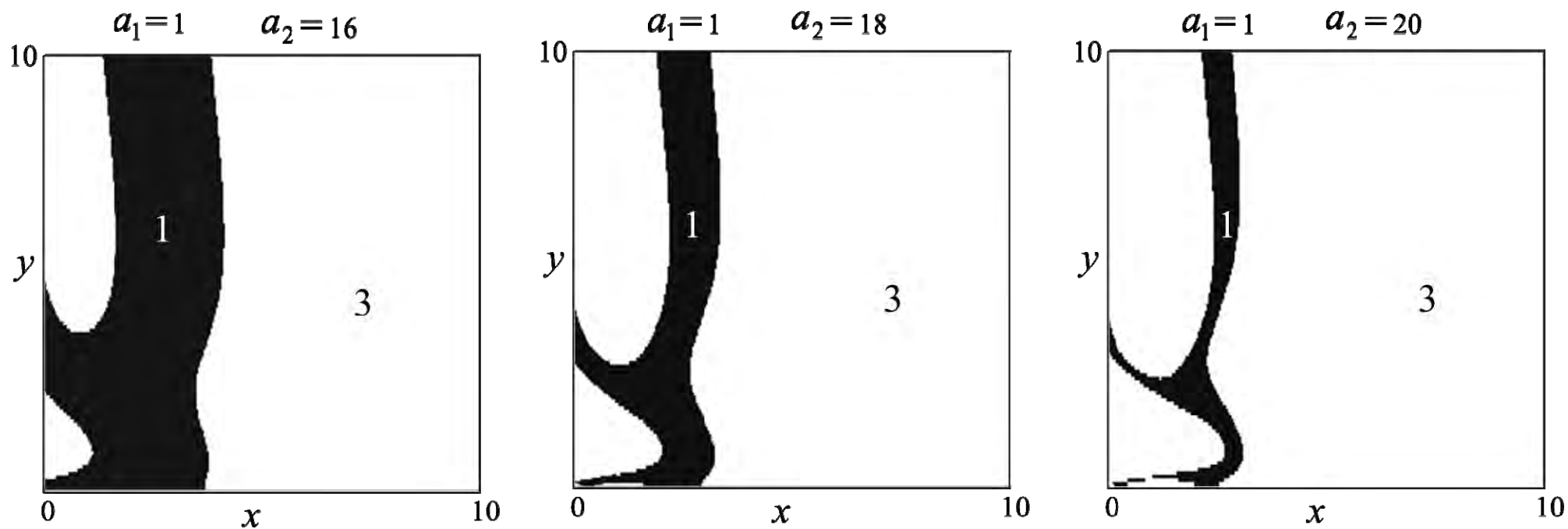
Область устойчивости нетривиального равновесия системы (3).
Цифры на графиках соответствует значению параметра ρ

СОСУЩЕСТВОВАНИЕ НЕСКОЛЬКИХ АТТРАКТОРОВ



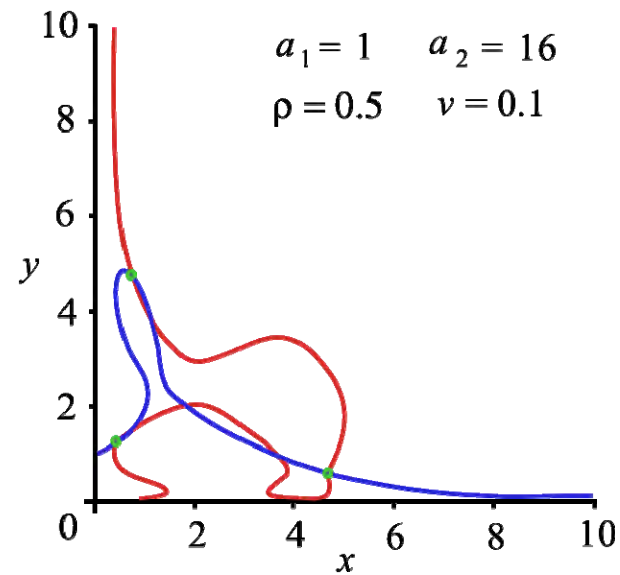
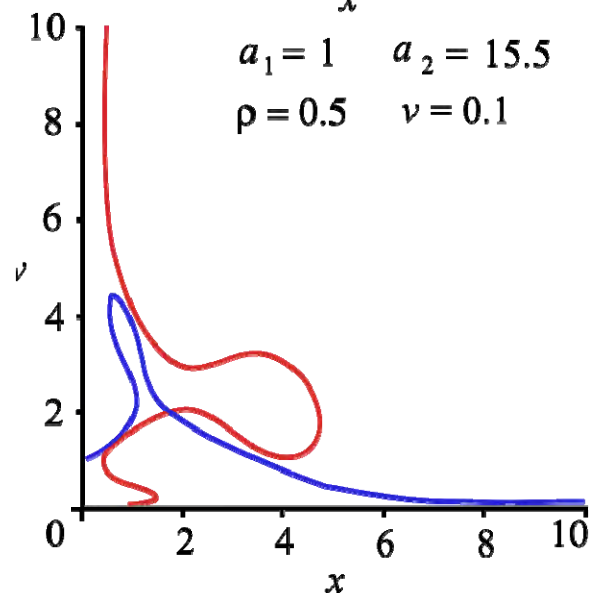
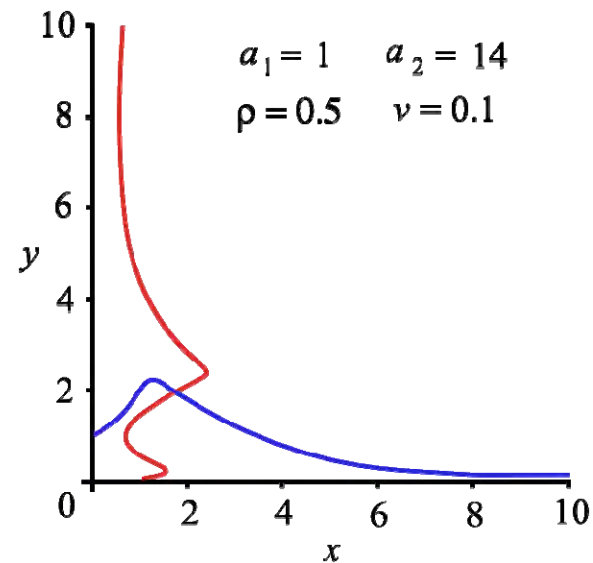
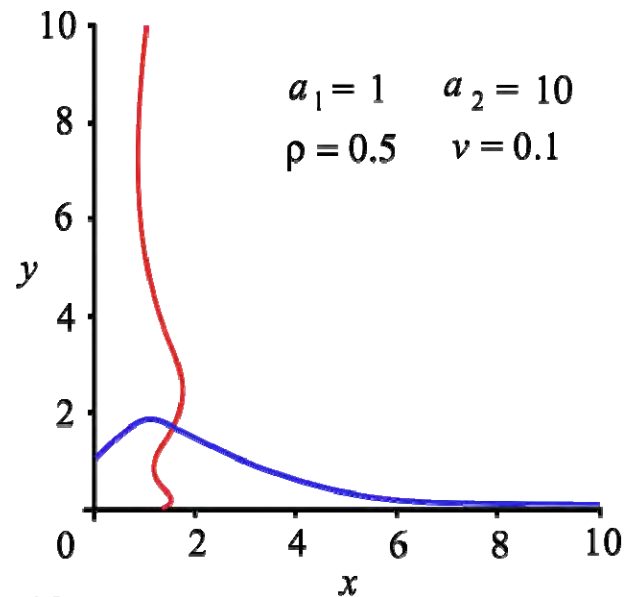
Показано, что в фазовом пространстве исследуемой модели могут сосуществовать несколько аттракторов со своими бассейнами притяжения.

БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ $\rho < 1$



*Бассейны притяжения модели (3) при $\nu = 0.1$ и $\rho = 0.5$.
Цифрами обозначены длины, наблюдаемых циклов.*

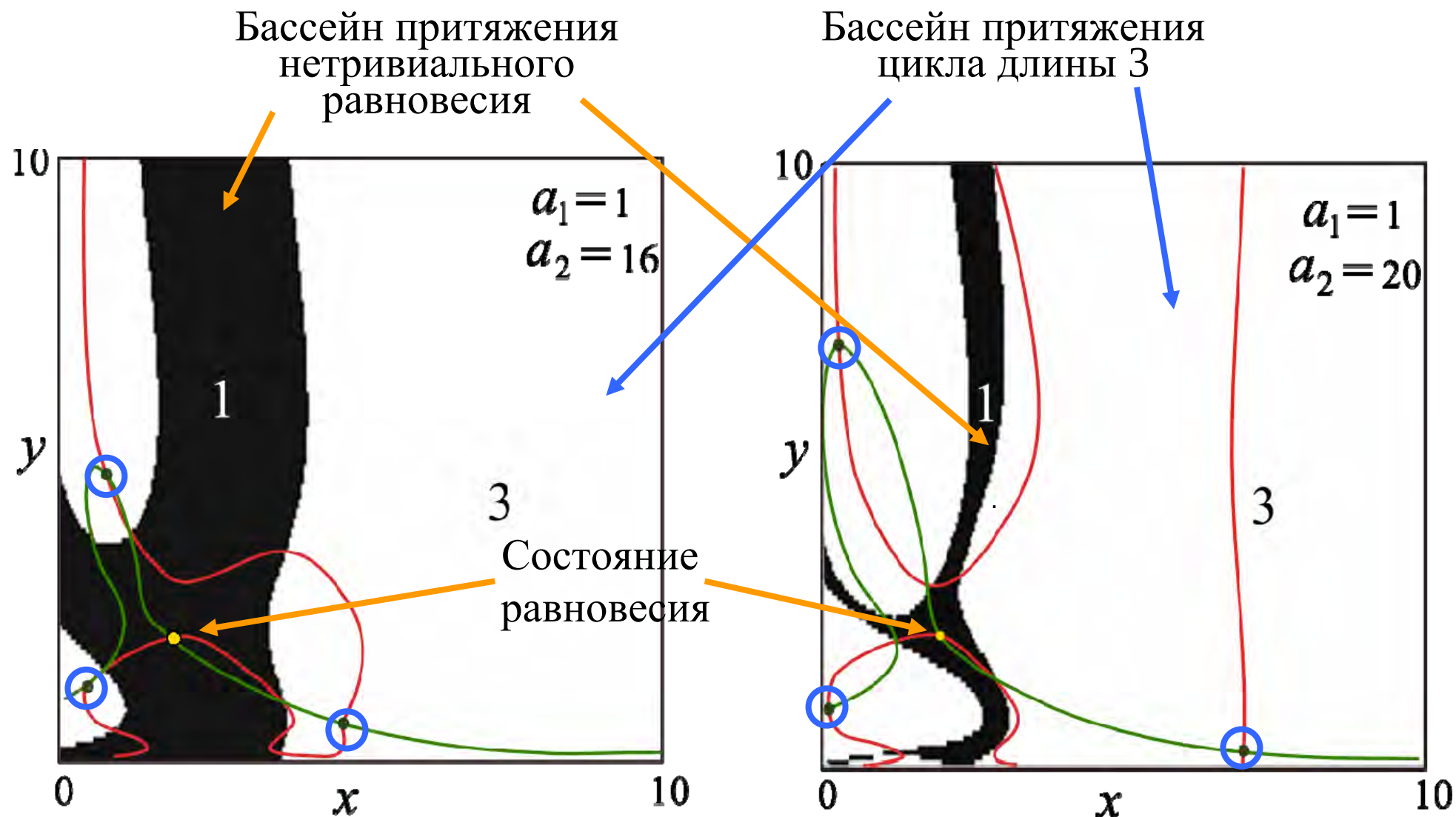
ВОЗНИКНОВЕНИЕ ЦИКЛА ДЛИНЫ 3 $\rho < 1$



*Графическое решение трижды
итерированного отображения (3)*

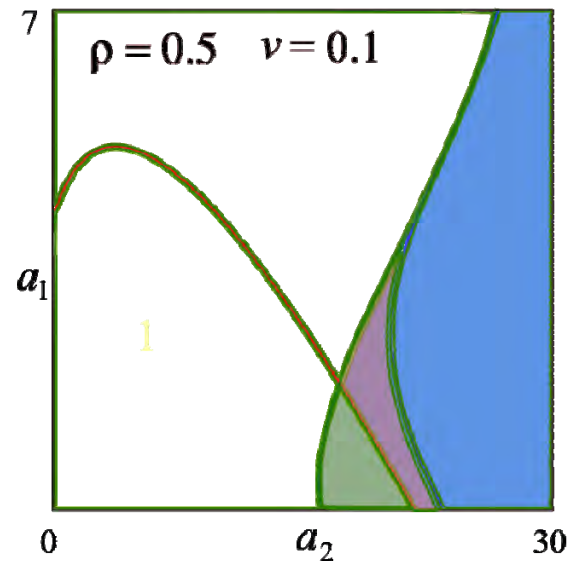
БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ

$\rho < 1$



Бассейны притяжения модели (3) при $\rho < 1$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ПРИ $\rho < 1$



- 1
- Q
- 3
- Q//3
- 1//3

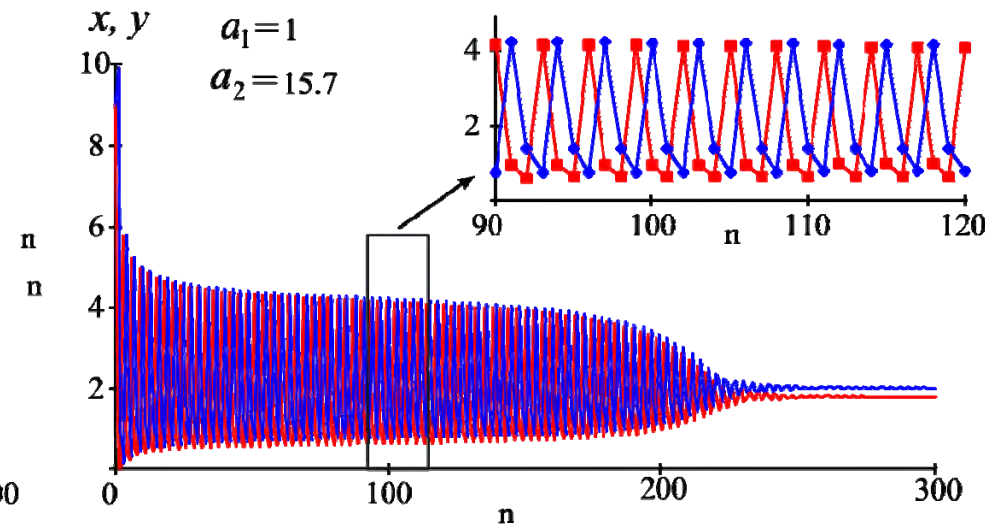
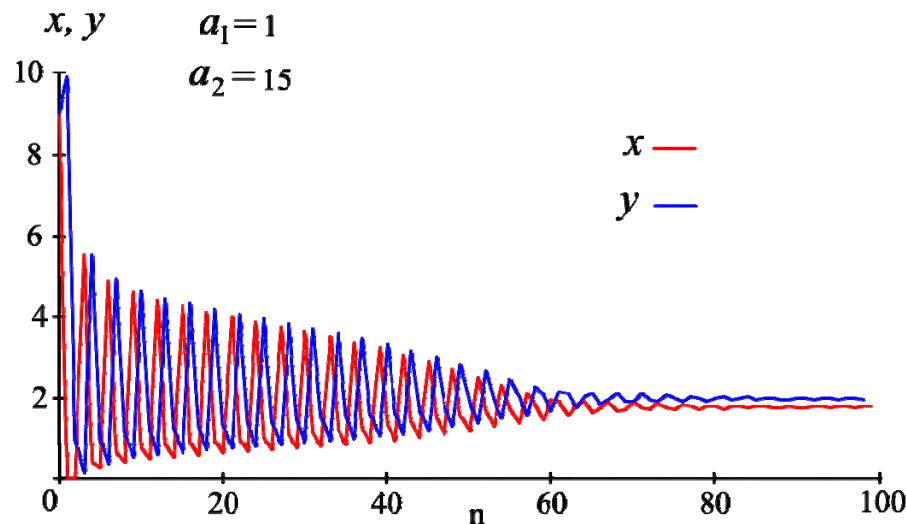
1- цикл длины 1

Q - квазипериодическая динамика

3 - цикл длины 3

// - одновременное существование

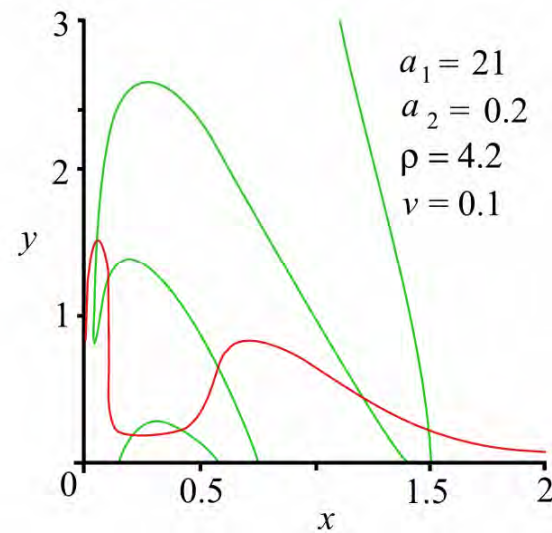
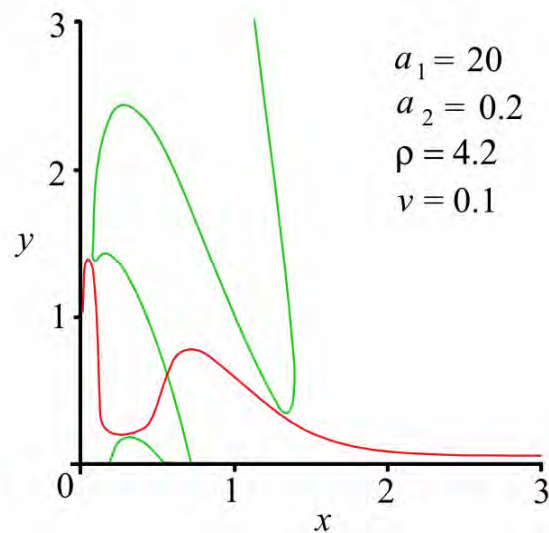
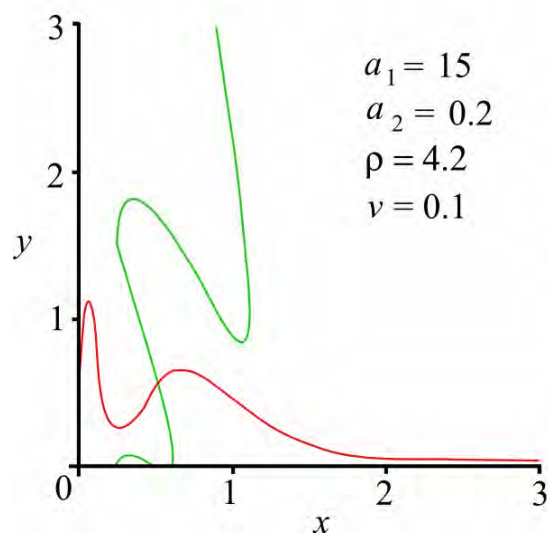
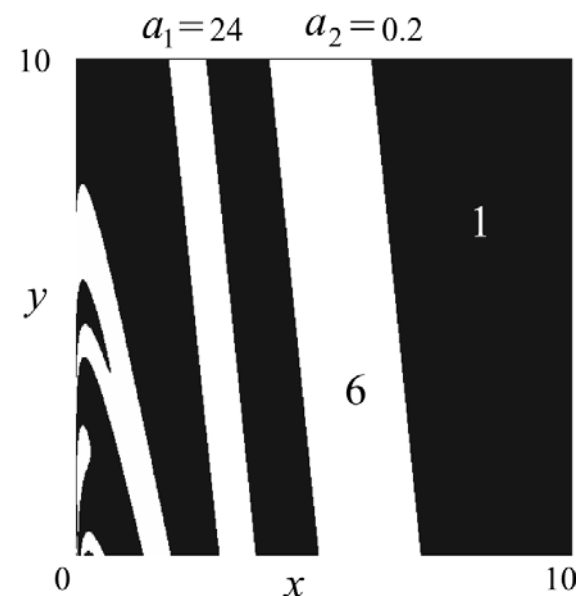
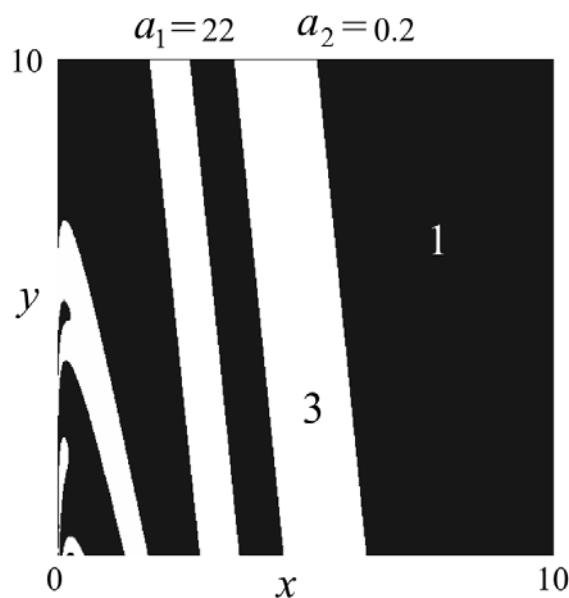
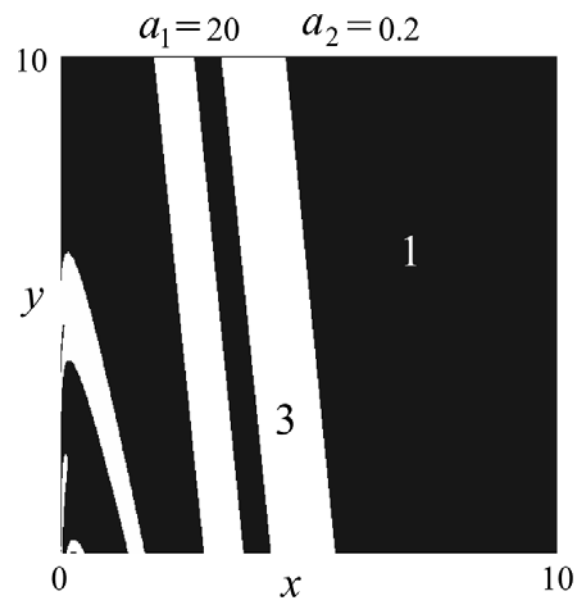
Карта асимптотических динамических режимов системы (3) при $\nu=0.1$ и $\rho=0.5$



Временная реализация системы (3) при $\nu=0.1$ и $\rho=0.5$ и начальном условии из бассейна притяжения цикла длины 3

БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ

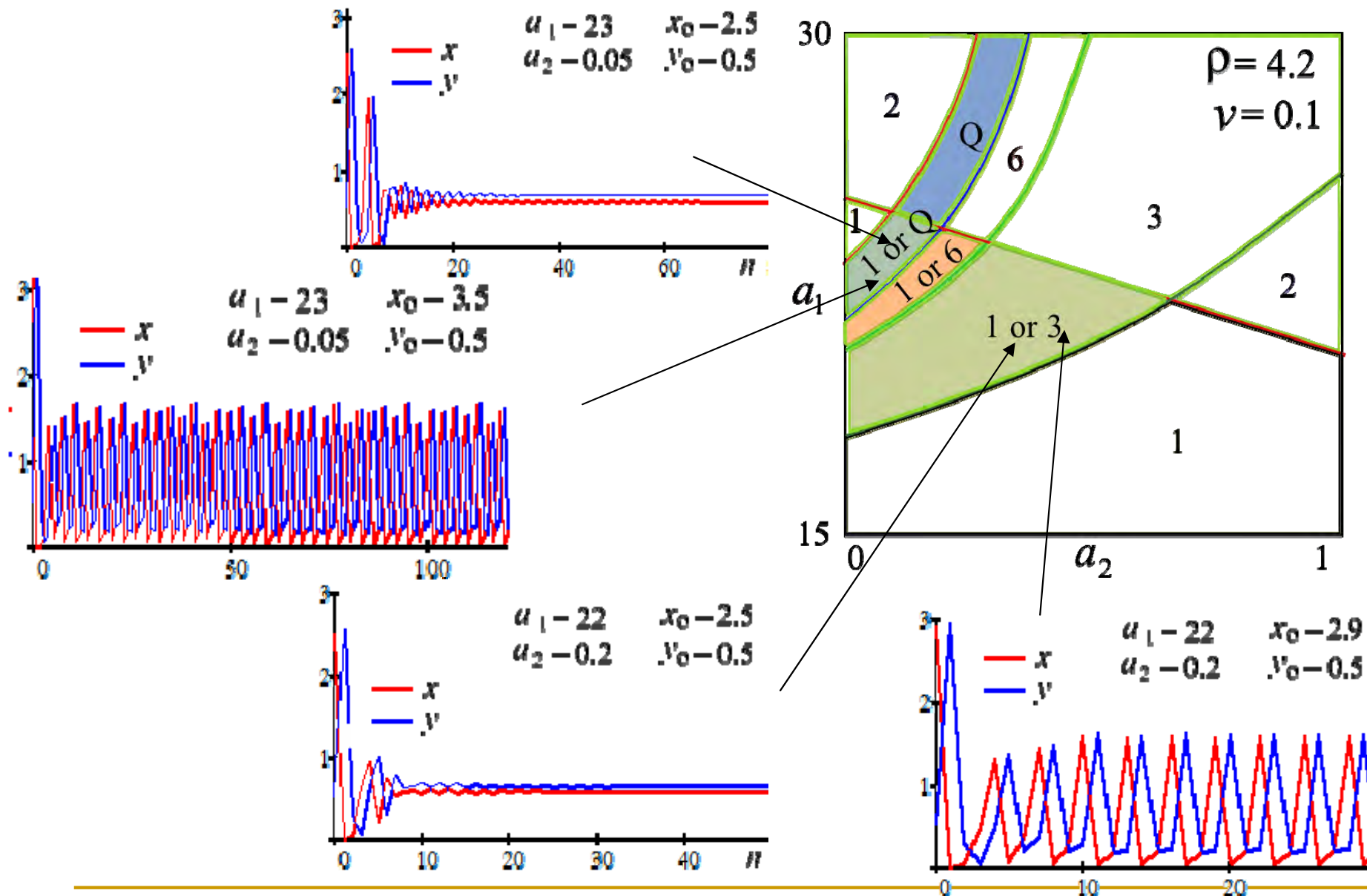
$$\rho > \rho^* = \frac{3+v}{v^2 + 2v + 1}$$



Бассейны притяжения модели (3) при $v = 0.1$ и $\rho = 4.2$.
Цифрами обозначены длины, наблюдаемых циклов.

$$\rho > \rho^* = \frac{3 + \nu}{\nu^2 + 2\nu + 1}$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

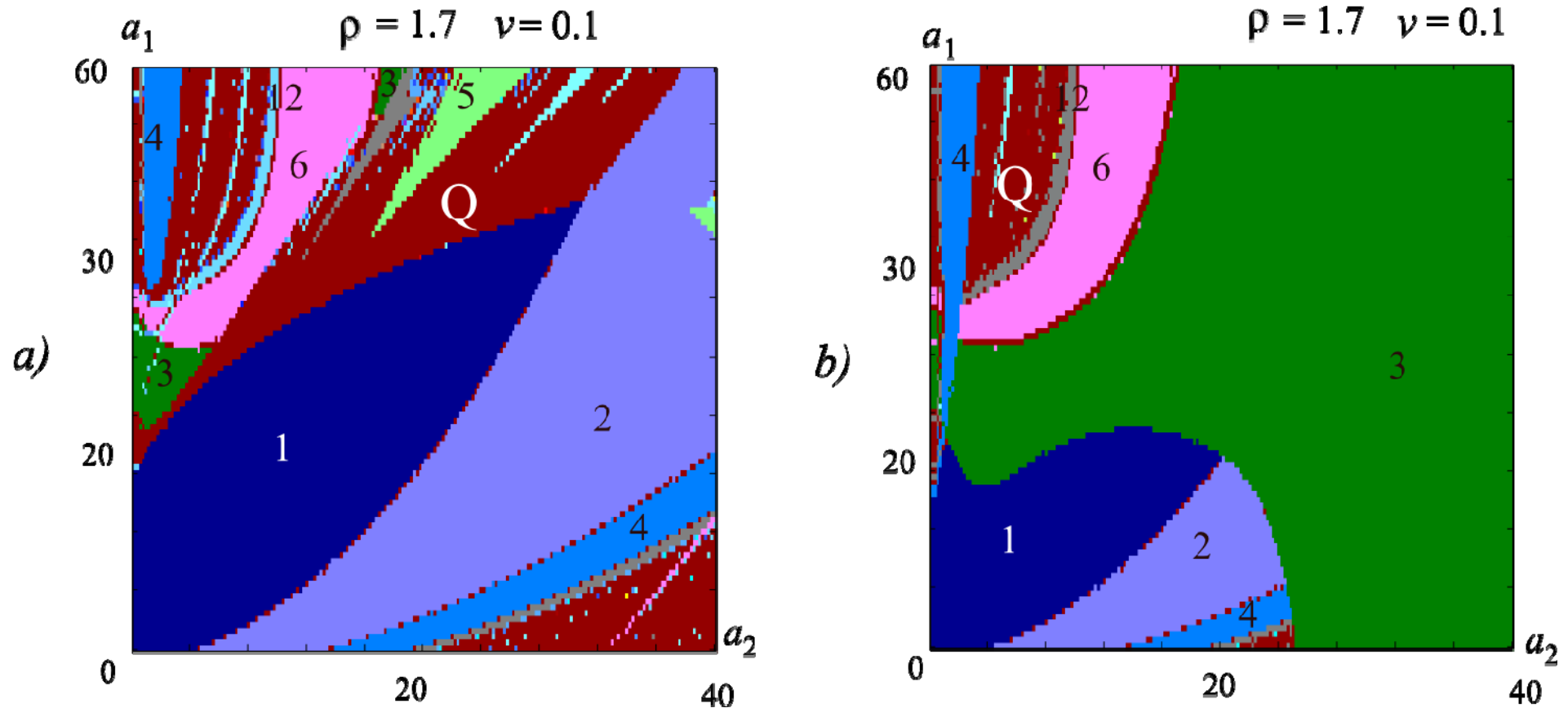


Карта динамических режимов модели (3) при $\nu = 0.1$ и $\rho = 4.2$.

Цифрами обозначены длины, наблюдаемых циклов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

$$1 < \rho = \rho^* < \frac{3 + \nu}{\nu^2 + 2\nu + 1}$$



Карты асимптотических динамических

режимов системы (3) в зависимости от начального условия (НУ)

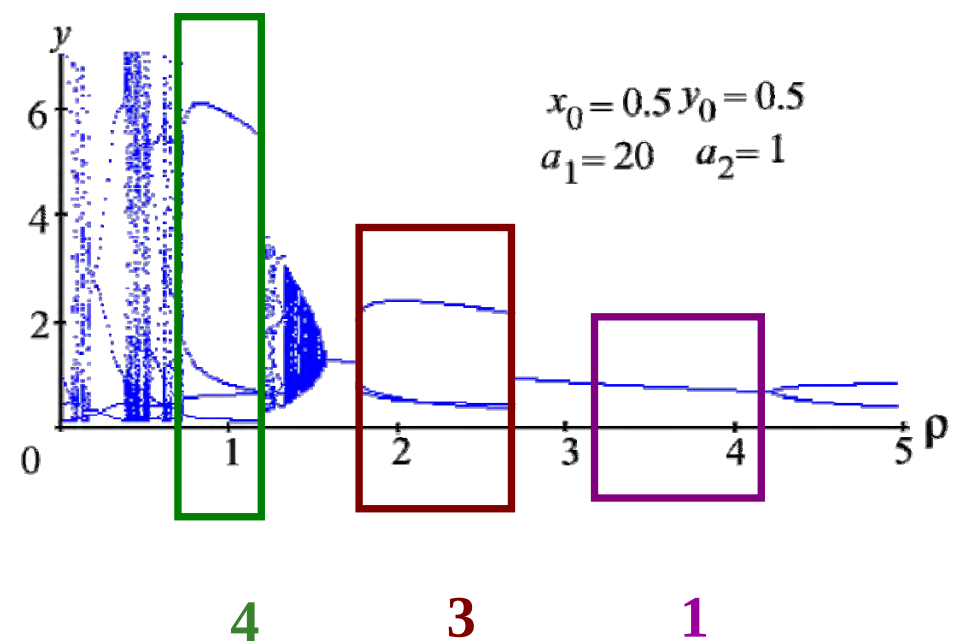
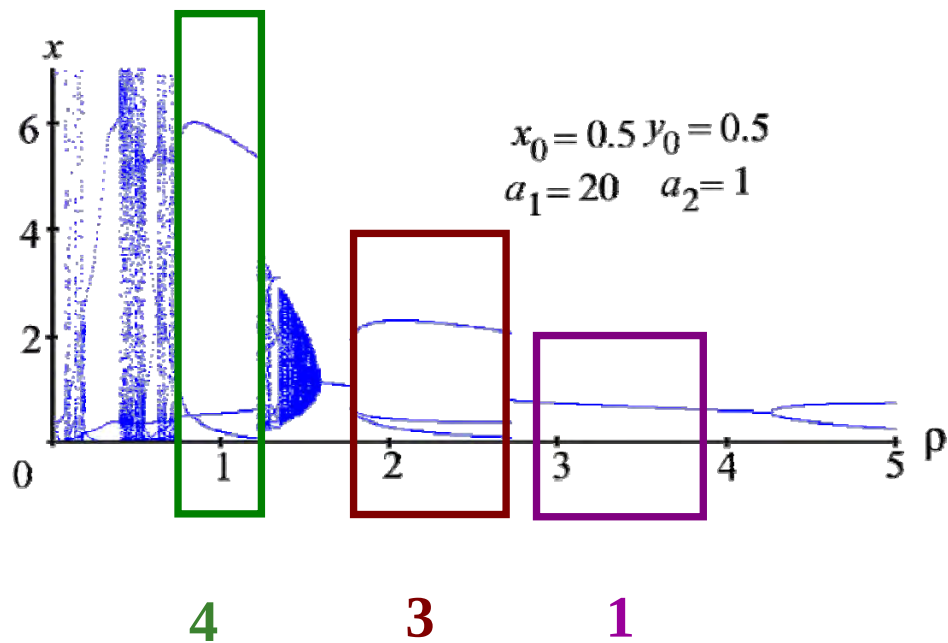
а) НУ принадлежит бассейну притяжения равновесного состояния;

б) НУ принадлежит бассейну притяжения устойчивого цикла длины три.

Цифрами обозначены длины, наблюдаемых циклов

Q - квазипериодическая динамика

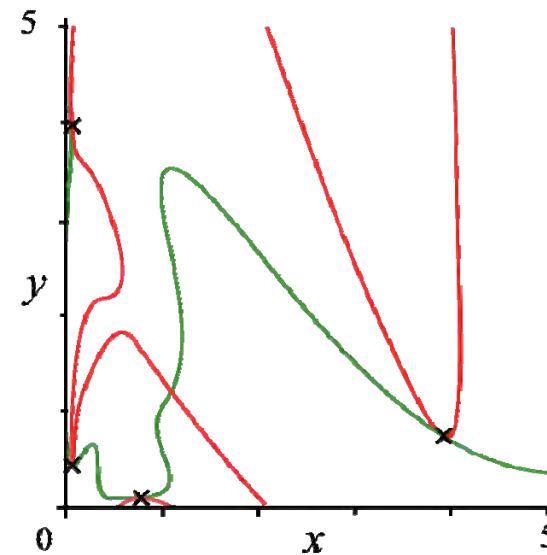
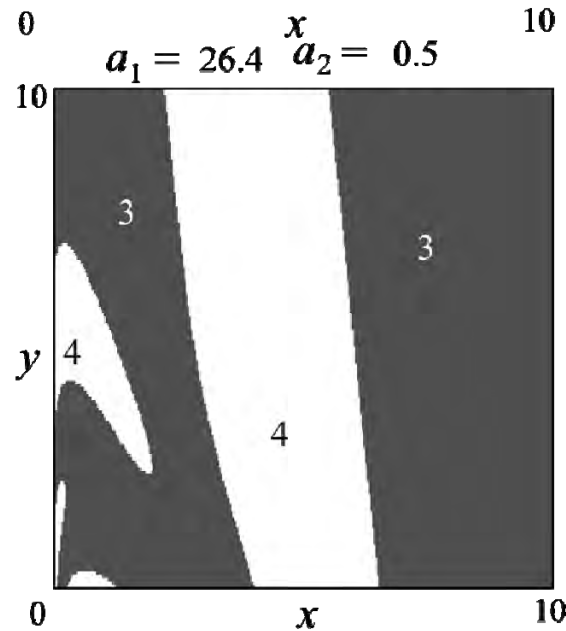
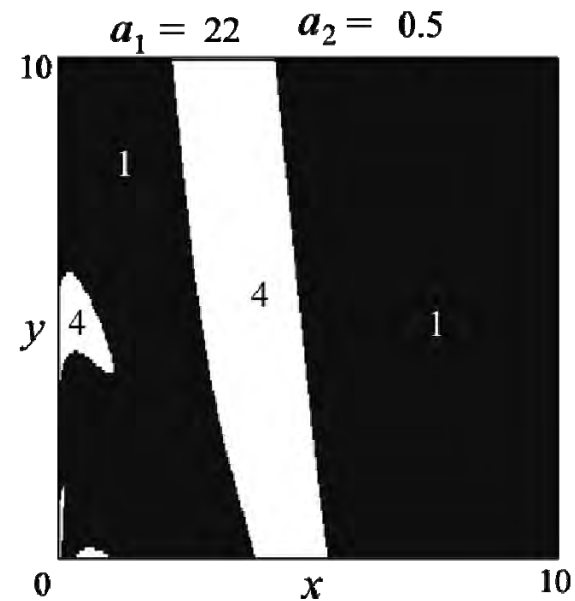
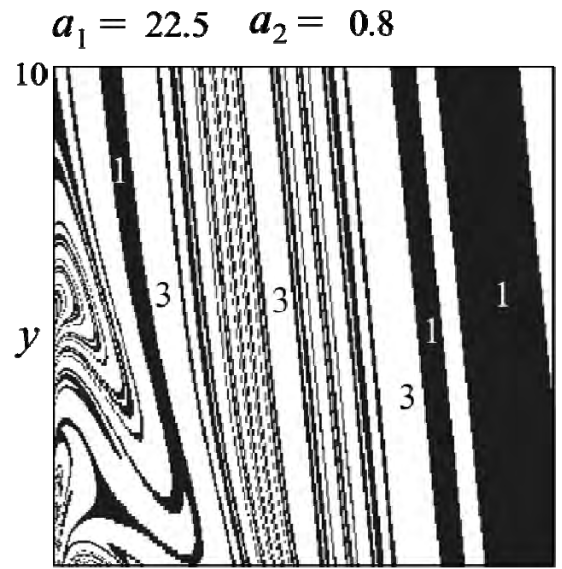
ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ПРИ $1 < \rho = \rho^* < \frac{3+v}{v^2+2v+1}$



Бифуркационные диаграммы динамических переменных x и y по параметру ρ при $v=0.1$

БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ

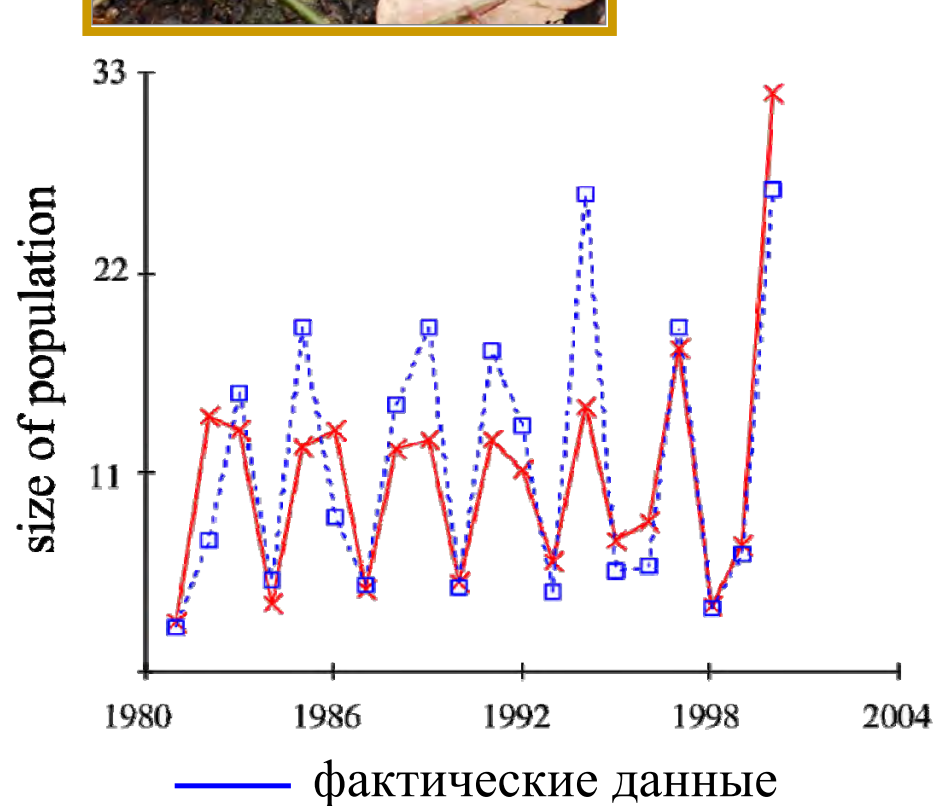
$$1 < \rho = \rho^* < \frac{3 + v}{v^2 + 2v + 1}$$



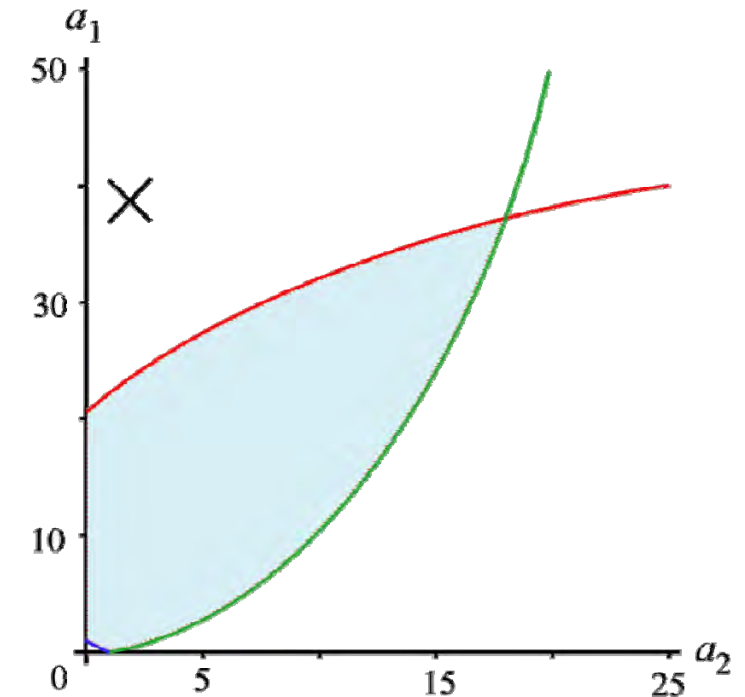
Бассейны притяжения модели (3) при $v = 0.1$ и $\rho = 1.7$.
Цифрами обозначены длины, наблюдаемых циклов.



ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ РЫЖЕЙ ПОЛЕВКИ



$$\begin{aligned} a_1 &= 38.8 \\ a_2 &= 1.8 \\ \nu &= 0.001 \\ \rho &= 2.02 \\ \rho^* &= 2.99 \\ A &= 26.6 \\ R^2 &= 0.681 \end{aligned}$$



Динамика численности популяции рыжей полевки в апреле с учетом плотностной регуляции, дополнена параметрическим портретом, соответствующим оценкам параметров

Сумма переменных $x_n + y_n$ соответствует наблюдаемой численности популяции рыжей полевки в Апреле в n -ый сезон размножения

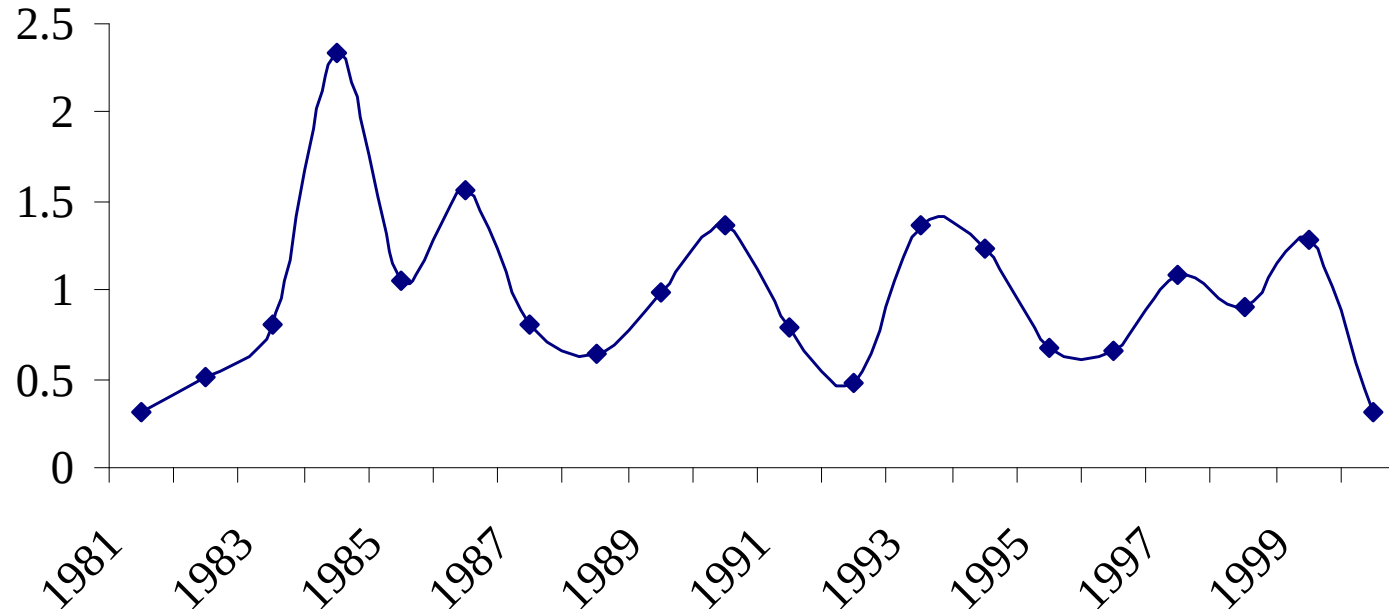
УЧЕТ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ

S гидротермический коэффициент Селянинова
(характеризует увлажненность территории
(влагообеспеченности) в вегетативный период)

$$S = \frac{10R}{\sum t}$$

R сумма осадков в миллиметрах за период
с температурами выше 10° ,

$\sum t$ сумма температур в градусах за то же время



*Динамика среднего коэффициента Селянинова
за период апрель-июнь*

МОДЕЛЬ С УЧЕТОМ ВНЕШНИХ ФАКТОРОВ

Модификация функции:

$$f(x_n, y_n) = e^{-\beta \cdot x_n - \gamma \cdot y_n + b S_n}$$

b коэффициент влияние фактора на процессы воспроизводства особей рыжей полевки

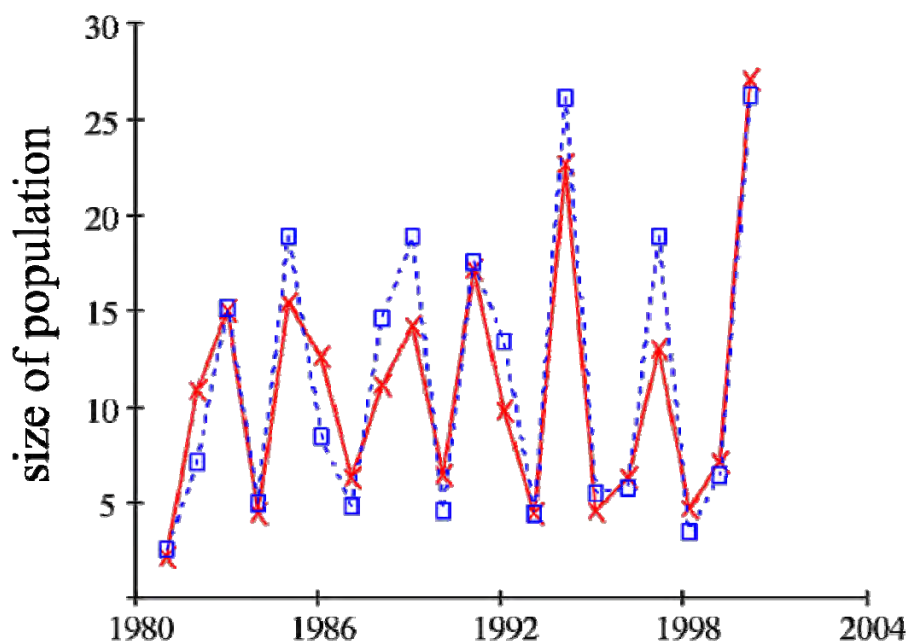
S_n среднее значение гидротермического коэффициента Селянинова за период апрель-июль в году n

Соответственно, модель (2) принимает вид:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (r_1 x_n + r_2 y_n) e^{-\beta \cdot y_n - \gamma \cdot z_n + b \cdot S_n} \\ y_{n+1} = s \cdot x_n + v \cdot y_n \end{cases} \quad (4)$$



ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ ПОПУЛЯЦИИ РЫЖЕЙ ПОЛЕВКИ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛИ (4)



— фактические данные

$$a_1 = 26.722$$

$$a_2 = 5.6$$

$$\nu = 0.001$$

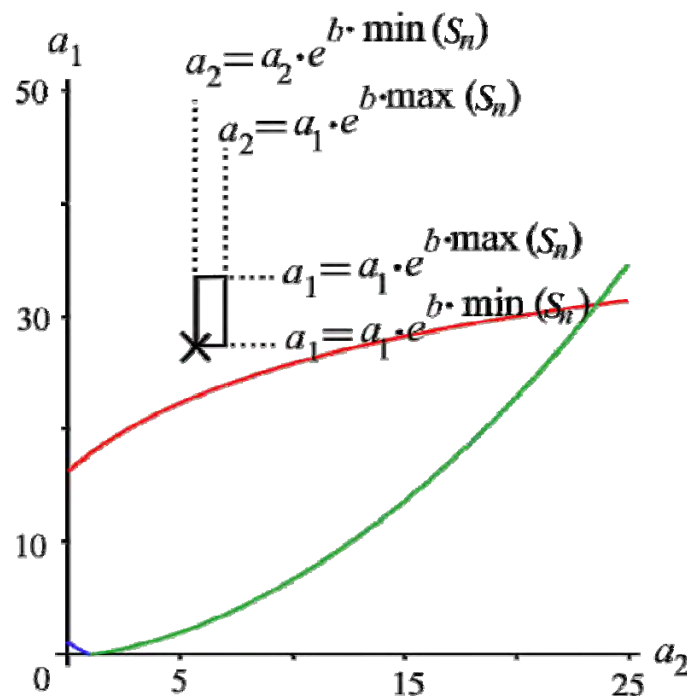
$$b = 0.098$$

$$\rho = 1.792$$

$$\rho^* = 2.99$$

$$A = 20.9$$

$$R^2 = 0.88$$

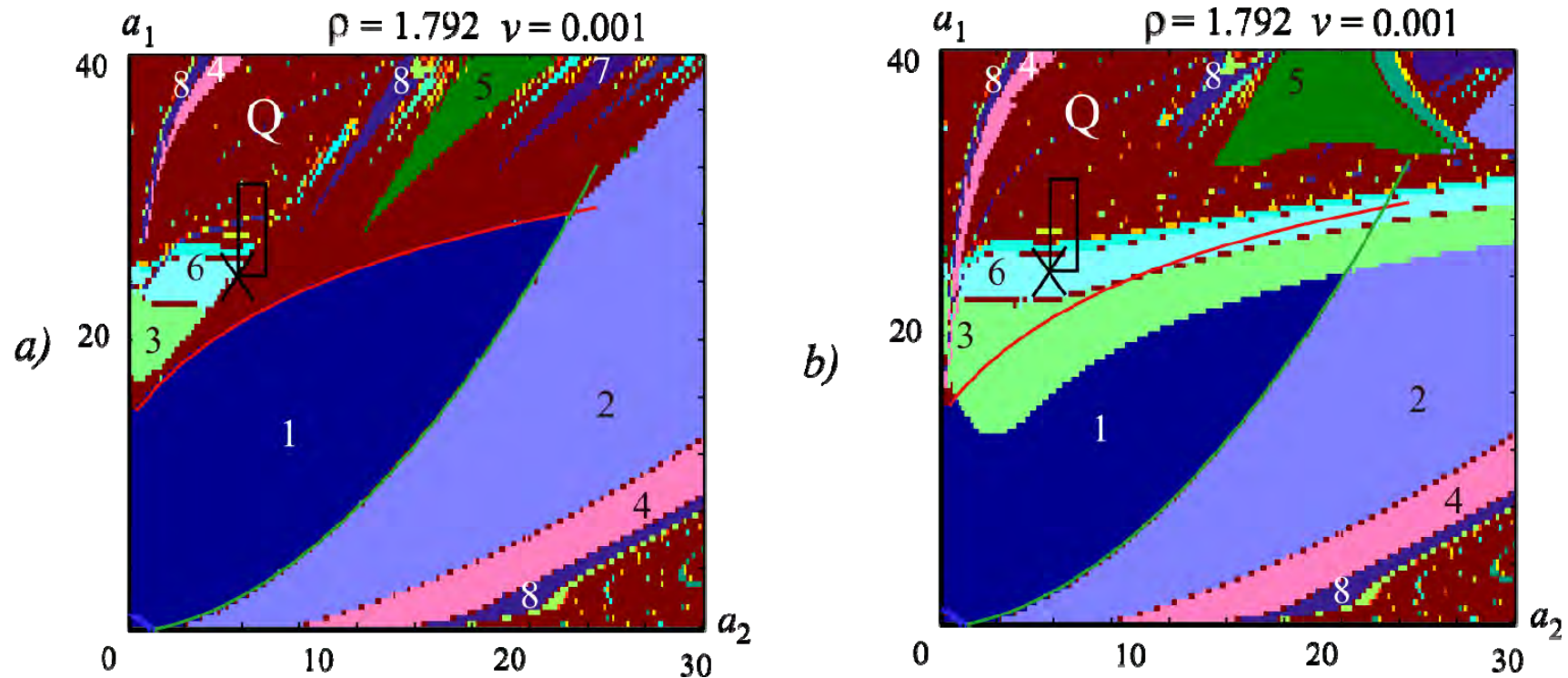


— модельные данные

Динамика численности популяции рыжей полевки в апреле с учетом климатических факторов, дополнена параметрическим портретом, соответствующим оценкам параметров

Сумма переменных $x_n + y_n$ соответствует наблюдаемой численности популяции рыжей полевки в Апреле в n -ый сезон размножения

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ МОДЕЛИ (4) ДЛЯ НАЙДЕННЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ



Карты асимптотических динамических

режимов системы (3) в зависимости от начального условия (НУ)

а) НУ принадлежит бассейну притяжения равновесного состояния;

б) НУ принадлежит бассейну притяжения устойчивого цикла длины три.

Цифрами обозначены длины, наблюдаемых циклов

Q - квазипериодическая динамика

ВЫВОДЫ:

Построена математическая модель популяций с коротким жизненным циклом и плотностно-зависимой регуляцией рождаемости. Оценка коэффициентов модели проведена на основе данных о динамике численности популяции рыжей полевки, обитающей в Удмуртии.

Показано, что предложенная модель может иметь несколько устойчивых аттракторов, в частности, циклы длины три и (или) четыре, которые возникают в результате касательной бифуркации. Следовательно, характер динамики популяции существенно зависит от начальных условий (или текущих значений численности).

Показано, что влияние внешних климатических факторов на процессы воспроизводства популяции заметно расширяет диапазон возможных динамических режимов, и приводит, фактически, к случайному блужданию по бассейнам притяжения этих режимов.