ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЛАГИ В РАСТИТЕЛЬНОМ ПОКРОВЕ С УЧЕТОМ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ

А.В. Воротынцев
avv_alexv@mail.ru, ВЦ РАН, Москва, Россия

1. Схема переноса тепла и влаги в растительном покрове и почве

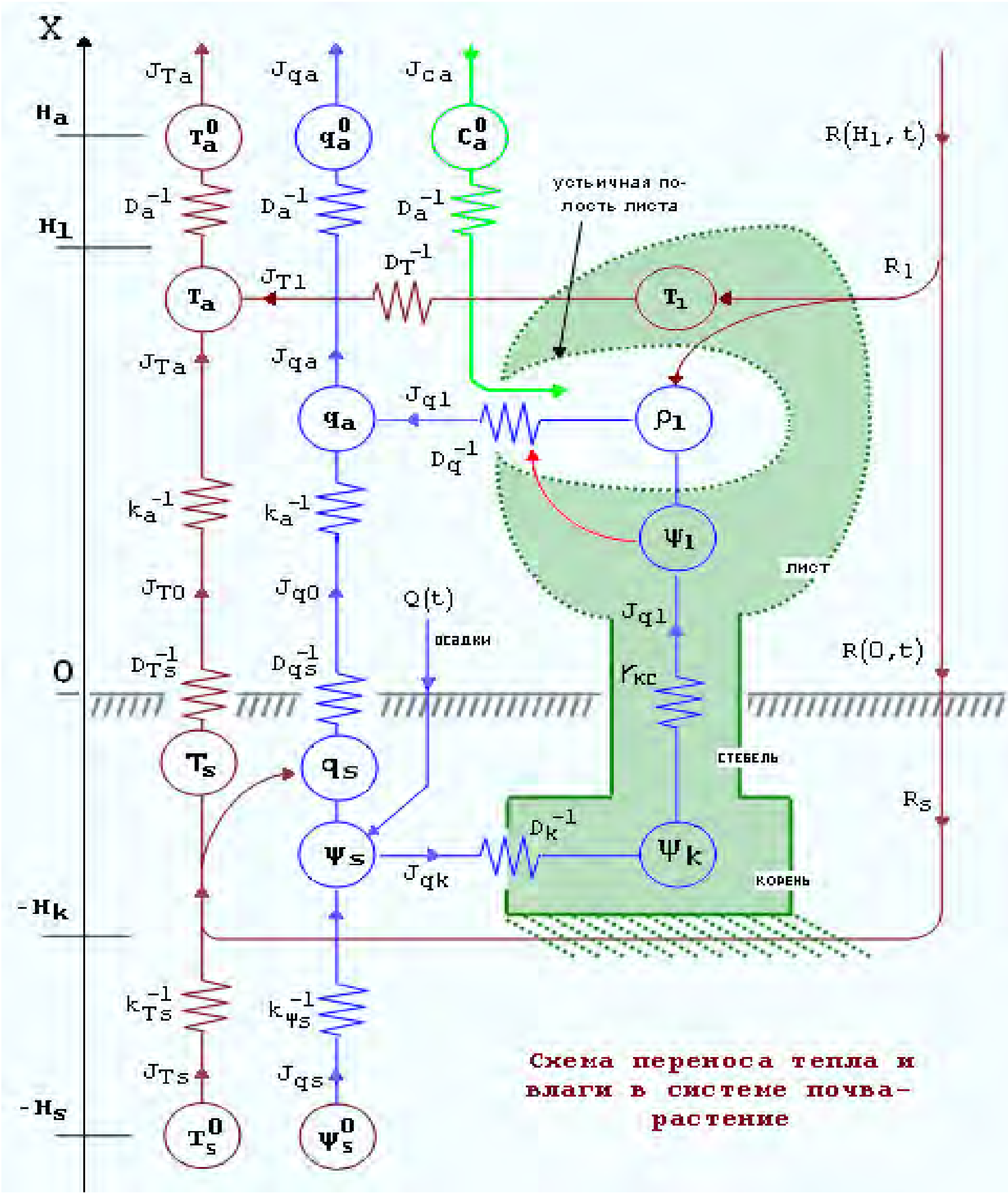


Рис. 1. Схема переноса тепла и влаги в РП и почве.

На рис. 1 представлена схема потоков тепла и влаги в системе почва-растение. На схеме зигзагами изображены сопротивления, которые преодолевают потоки тепла и влаги. Сопротивления позволяют определить потоки тепла и влаги. Например, поток J_{ql} водяного пара из листьев в межлистное пространство, преодолевающий сопротивление D_q^{-1}, равен $J_{ql} = -D_q(q_a - q_l)$, где q_l и q_a и – концентрации пара внутри и вне листьев. Аналогично в непрерывном случае уравнение $\partial y / \partial t = -\mathrm{div}\, J + f$, $J = -k \nabla y$ описывает перенос и накопление концентрации y вещества.

Многие параметры модели рис. 1, например сопротивления потокам, трудно измерить. Поэтому представляется необходимым построение ряда приближенных моделей, допускающих идентификацию.

2. Системы уравнений модели переноса тепла и влаги

Моделирование переноса тепла и влаги является одной из главных задач моделирования растительного покрова (РП), поскольку здесь определяется сопротивление устьичных щелей листьев, регулирующее поглощение CO_2 и его преобразование в биомассу органов в процессе фотосинтеза, т.е. регулирующее рост биомассы растительного покрова.

Приведем уравнения модели переноса тепла и влаги, изображенного на рис. 1, см. [1], [2]. В слое $0 \le x \le H_l$ растительного покрова и в корнеобитаемом слое почвы $-H_s \le x \le 0$ рассмотрим четыре связанные системы уравнений: 2 системы уравнений (1)-(4) для температуры воздуха T_a, листьев T_l, концентрации водяного пара в межлистном воздухе q_a, в устьичных полостях листьев q_l:

$$J_{Ta} = -c_p k_a \partial T_a/\partial x, \qquad J_{qa} = -k_a \partial q_a/\partial x, \tag{1}$$

$$c_p \partial T_a/\partial t = -\partial J_{Ta}/\partial x + f_{Tl}, \quad \partial q_a/\partial t = -\partial J_{qa}/\partial x + f_{ql}, \tag{2}$$

$$f_{Tl} = c_p D_T S_l (T_l - T_a) p_l, \qquad f_{ql} = D_q S_l (q_l - q_a) p_l, \tag{3}$$

$$f_{Tl} + \chi f_{ql} = \partial R_{ll}/\partial x, \tag{4}$$

и 2 системы (5-7) для температуры поверхности T_s почвы и водного потенциала $\psi_s < 0$ почвы:

$$J_{Ts} = -c_p k_{Ts} \partial T_s/\partial x, \qquad J_{\psi s} = -k_{\psi s} \partial \psi_s/\partial x, \tag{5}$$

$$c_s \partial T_s/\partial t = -\partial J_{Ts}/\partial x, \qquad c_\psi \partial \psi_s/\partial t = -\partial J_{\psi s}/\partial x - f_{\psi s}, \tag{6}$$

$$f_{\psi s} = J_{ql} p_k + D_k S_k (\psi_s - \overline{\psi}_s) p_k, \tag{7}$$

с краевыми условиями:

$$T_a = T_a^0(t), \qquad q_a = q_a^0(t), \qquad x = H_a;$$

$$J_{Ta} = c_p D_a \left(T_a - T_a^0 \right), \qquad J_{qa} = D_a \left(q_a - q_a^0 \right), \qquad x = H_l; \tag{8}$$

$$J_{Ta} = c_p D_{Ts} (T_s - T_a), \qquad J_{qa} = D_{qs} (q_s - q_a), \qquad x = 0; \tag{9}$$

$$J_{Ta} + \chi J_{qa} - J_{Ts} = R(0, t), \qquad -J_{\psi s} + J_{qa} = Q(t), \qquad x = 0; \tag{10}$$

$$T_s = T_s^0, \qquad \psi_s = \psi_s^0, \qquad x = -H_s; \tag{11}$$

Ассимиляция CO2 листьями, а также, как видно из (3), транспирация J_{ql} листьев и в целом транспорт воды в растениях регулируются проводимостью устьиц D_q, водным потенциалом листьев ψ_l, $\psi_m \le \psi_l < 0$, устьичным сопротивлением r_{st} листьев и описывается нелинейными выражениями:

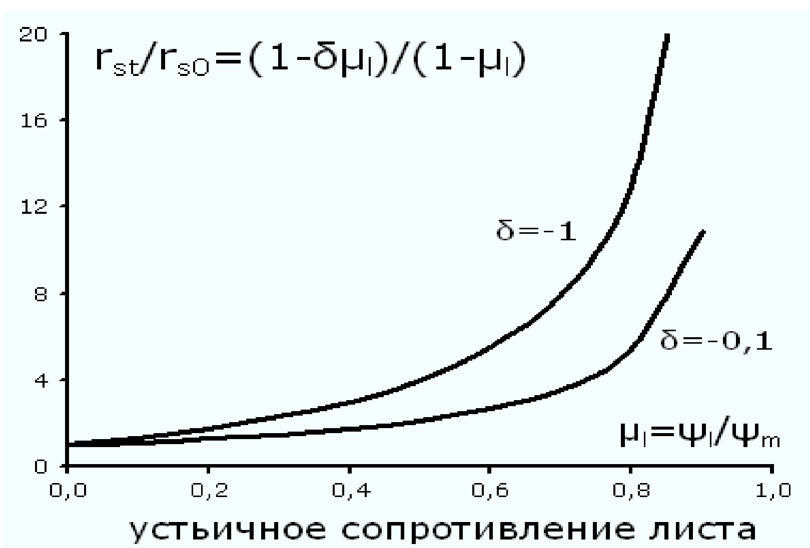
$$J_{ql} = \int_0^{H_1} f_{ql} dx\,,\quad J_{ql} = D_k'\left(\overline{\psi}_s - \psi_l\right),\quad \text{при } \psi_m < \psi_l < \overline{\psi}_s < 0\,;$$

иначе $J_{ql} = 0$, при $\overline{\psi}_s \le \psi_m < 0$,

$$\text{где } \overline{\psi}_s = \int_{-H_k}^{0} \psi_s p_k dx\,;\quad r_{st}(\mu_l) = r_{s0}\left(1 - \delta_l \mu_l\right)\left(1 - \mu_l\right)^{-1},$$

$$1/D_q = 1/D_T + r_{st}\,,\quad 1/D_k' = r_{kc} + 1/\left(D_k S_k\right);$$

$$0 < \mu_l \equiv \psi_l/\psi_m < 1\,; \tag{12}$$



Здесь J_{Ta}, J_{qa} – потоки тепла и водяного пара в воздухе; J_{Ts}, $J_{\psi s}$ – потоки тепла и воды в почве; $R_{ll}(x,t)$ – заданная поглощенная слоем (0,x) длинноволновая и коротковолновая радиация, $R(0,t)$ – радиационный баланс у поверхности почвы; $R_s = R(0,t) + J_{Ts}\big|_{x=-0}$; S_l, S_k – поверхности листьев и корней на единицу поверхности почвы; $S_l p_l(x)$, $S_k p_k(x)$ – плотность листовой и всасывающей корневой поверхности. T_a^0, q_a^0, $Q(t)$ и T_s^0, ψ_s^0 – заданные функции времени, измеряемые на высоте H_a метеобудки над покровом и на глубине $-H_s$ почвы; остальное – заданные константы. Здесь c_p, c_s – теплоемкость воздуха и почвы, $k_a(x)$ –коэффициент турбулентной проводимости воздуха и k_{Ts} - коэффициент теплопроводности почвы; $k_{\psi s}$ – коэффициент влагопроводности почвы; χ – теплота парообразования; D_T, D_q, D_k, D_a, D_{Ts}, D_{qs} – проводимости, см. рис. 1; $\overline{\psi}_s$ – усредненный водный потенциал корнеобитаемого слоя почвы.

Потоки являются величинами, имеющими знак. Направления положительных потоков указаны на рис. 1 стрелками. Дифференциальные уравнения систем (1)-(11) связаны алгебраическими выражениями (4) и (10), описывающими балансы энергии в межлистном воздухе и на поверхности почвы.

Модель (1)-(12) позволяет рассчитать влияние внешних условий на величину устьичного сопротивления r_{st} , с помощью которого растение балансирует свой температурный режим T_l, тургор листьев и поглощение CO_2, затрачиваемое на рост биомассы. Рост внутрилистного давления (тургора), растягивающего лист, способствует росту биомассы листа за счет продуктов фотосинтеза. Полагают, что величина сопротивления r_{st} определяется водным потенциалом $\psi_l < 0$ листа и его потенциалом завядания $\psi_m < 0$, как показано на рис. 2. Эта зависимость существенно нелинейна. Чем ближе ψ_l к ψ_m, $\psi_m < \psi_l \le 0$, тем больше сопротивление r_{st} и тем меньше вынос тепла и воды транспирацией J_{ql} листьев, тем больше T_l и больше тургор, но меньше поглощение CO_2 листьями и соответственно наоборот.

Перенос тепла и пара в растительном покрове осуществляется турбулентным перемешиванием. Турбулентное перемешивание появляется из-за того, что днем почва нагревается больше, чем надпочвенный воздух. Поэтому верхние более холодные и тяжелые массы воздуха опускаются вниз, выталкивая вверх нижние более теплые и поэтому легкие массы воздуха, которые затем охлаждаются и снова опускаются вниз.

3. Обозначения

Введем обозначения:

$$d_a(x,t) = \rho(T_a) - q_a,\ d_s = \rho(T_s) - q_s,\ d_a^0 = \rho(T_a^0) - q_a^0(t);$$

$$\rho(T) = \rho(T_1) + \delta(T - T_1);$$

$$k(x) = \frac{k_a(x)}{1+\delta\chi/c_p},\ G = \frac{1}{1+c_p/(\delta\chi)},\ G_l = G(1-b_l),\ G_s = G(1-b_s);$$

$$\frac{1}{D_{ak}} = \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k_a(x)},\ \frac{1}{D'_{ak}} = \frac{\delta\chi}{c_p D_{ak}},\ \frac{1}{D'_{Hk}} = \frac{1}{D_{ak}} + \frac{1}{D'_{ak}} = \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)},$$

$$\frac{1}{D'_{Ta}} = \frac{\delta\chi}{c_p D_a},\ \frac{1}{D'_q} = \frac{1}{D_q S_l},\ \frac{1}{D'_T} = \frac{\delta\chi}{c_p D_T S_l},\ \frac{1}{D'_{Ts}} = \frac{\delta\chi}{c_p D_{Ts}},$$

$$\frac{1}{D'_a} = \frac{1}{D_a} + \frac{1}{D'_{Ta}},\ \frac{1}{D'_l} = \frac{1}{D'_q} + \frac{1}{D'_T},\ \frac{1}{D'_s} = \frac{1}{D_{qs}} + \frac{1}{D'_{Ts}},$$

$$b_l = G^{-1}\frac{D'_l}{D'_T},\ b_s = G^{-1}\frac{D'_s}{D'_{Ts}},\ D'_\Sigma = D'_a + D'_l + D'_s\ . \qquad (13)$$

4. Квазистационарная приближенная модель переноса

Для $\partial q_a/\partial t \to 0$, $\partial q_a/\partial t \to 0$ в [1] получена квазистационарная модель переноса тепла и влаги в растительном покрове, определяющая все потоки и переменные системы (1)-(4), например,

$$J_{qa} = \chi^{-1} G R_a^0 + D'_a\left(d_a^0 - y\right), \qquad x = H_l\ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} J_{qa} = \chi^{-1} D'_l\left\{\frac{R'_{ll}}{D'_T} + \chi p_l y\right\}, \qquad 0 \le x \le H_l\ ;$$

$$J_{qa} = \chi^{-1} D'_s\left\{\frac{R_s}{D'_{Ts}} + \chi\left(y - d_s\right)\right\}, \qquad x = 0\ .$$

и т.д. через одну функцию $y(t,x)$ – дефицит влажности воздуха в растительном покрове. При этом функция $y(t,x)$ оказывается решением интегрального уравнения, полученного в [1].

5. Приближенная модель переноса для $k_a \to \infty$

Для хорошо вентилируемого растительного покрова при коэффициенте турбулентной проводимости $k_a \to \infty$ в [1] получено приближенное решение $y(t,x)$ интегрального уравнения в виде алгебраического выражения для дефицита влажности воздуха $y(t,x)=d_a$. Отсюда получены сравнительно простые алгебраические выражения (14)-(16) для потоков влаги J_{qa} и тепла J_{Ta} на верхней границе покрова и потоков J_{q0} и J_{T0} у поверхности почвы, а также для потока транспирации J_{ql} и потока тепла J_{Tl}, исходящих от растений, а также выражения для температур и концентраций водяного пара:

$$d_a=\chi^{-1}G\frac{R_a^0-b_lR_l-b_sR_s}{D'_\Sigma}+\frac{D'_ad_a^0+D'_sd_s}{D'_\Sigma};$$

$$J_{qa}=\chi^{-1}GR_a^0+D'_a\left(d_a^0-d_a\right),\ J_{Ta}=(1-G)R_a^0-\chi D'_a\left(d_a^0-d_a\right);\quad(14)$$

$$J_{ql}=\chi^{-1}D'_l\left(R_l/D'_T+\chi d_a\right),\ J_{Tl}=D'_l\left(R_l/D'_q-\chi d_a\right);\quad(15)$$

$$J_{q0}=\chi^{-1}D'_s\left(R_s/D_{Ts}+\chi\left(d_a-d_s\right)\right),\ J_{T0}=D'_s\left(R_s/D_{qs}-\chi\left(d_a-d_s\right)\right),\quad(16)$$

где R_a^0, R_s - радиационный баланс на границе H_l и у поверхности почвы; R_l - радиация, поглощенная покровом; d_a^0 и d_s - дефициты влажности воздуха при $x=H_l$ и $x=0$. Транспирация J_{ql} покрова складывается из потоков влаги, испаряемой листьями через устьичные щели. Проводимость D'_l устьичных щелей листьев, существенно зависит от их водного потенциала и в модели (14)-(16) является переменной величиной.

Приближение (14)-(16) позволяет сформулировать задачу связанного тепло- и влагопереноса в почве, в которой (14)-(16) оказываются краевыми условиями, [1]. Такая задача сравнительно проще системы (1)-(12).

6. Приближенная модель переноса при $D'_\Sigma / D'_T << 1$, $D'_\Sigma / D'_{Ts} << 1$

Заметим, что из (13) следует $D'_l / D'_T < 1$, $D'_s / D'_{Ts} < 1$. Можно усилить эти неравенства.

В отличие от переноса тепла и пара турбулентным перемешиванием в межлистном воздухе с коэффициентом проводимости k_a перенос вблизи границ лист-воздух и почва-воздух осуществляется другими молекулярными механизмами. Так, тепло переносится столкновениями молекул воздуха сравнительно быстрее чем водяной пар диффузией молекул пара.

Поэтому можно использовать следующие условия для коэффициентов проводимости на границах лист-воздух и почва-воздух:

$$D'_l / D'_T << 1 , \qquad D'_s / D'_{Ts} << 1 , \qquad A\,\overline{D}_\Sigma / D'_{Hk} << 1; \tag{17}$$

$$D'_\Sigma / D'_T << 1 , \qquad D'_\Sigma / D'_{Ts} << 1 , \qquad A\,\overline{D}_\Sigma / D'_{Hk} << 1, \tag{18}$$

которые позволяют получить последующие приближения модели (14)-(16). Запись $a << 1$ математически эквивалентна $a \to 0$; она означает: «a много меньше 1», например, $a < 0.1$. В условиях (17)-(18) третье неравенство $A\,\overline{D}_\Sigma / D'_{Hk} << 1$ эквивалентно

$k_a \to \infty$, [1]. Заметим, что более слабое условие (17) следует из (18).

Обозначим

$$\beta = \left(D'_a + D'_s\right) / D'_l \,, \qquad b = D'_s / \left(D'_a + D'_s\right) \,; \tag{19}$$

Введем обозначения:

$$d_t = \left(\chi^{-1} G R_a^0 + D'_a d_a^0 + D'_s d_s\right) / \left(D'_a + D'_s\right); \tag{20}$$

Нет раст. покрова:	Раст. покров залит водой:	
$J_{qa}^- = b J_{qa}^+$	$J_{qa}^+ = \chi^{-1} G R_a^0 + D'_a d_a^0$	(21)
$J_{Ta}^+ = b J_{Ta}^- + (1-b) R_a^0$	$J_{Ta}^- = (1-G) R_a^0 - \chi D'_a d_a^0$	(22)
$d_a^+ = d_t$	$d_a^- = 0$	(23)
$q_a^- = q_a^0 + J_{qa}^- / D_a$	$q_a^+ = q_a^0 + b^{-1}\left(q_a^- - q_a^0\right)$	(24)
$T_a^- = T_a^0 + J_{Ta}^- / \left(c_p D_a\right)$	$T_a^+ = T_a^0 + b\left(T_a^- - T_a^0\right) + (1-b) R_a^0 / \left(c_p D_a\right)$	(25)

Величины в левом и правом столбцах вычисляются стандартными метеосредствами на высоте H_a над покровом.

Теорема 1*. При* $D'_l / D'_T << 1$, $D'_s / D'_{Ts} << 1$ *справедливы равенства*

$$y_q = \frac{y_q^+ + \beta y_q^-}{1+\beta} \,, \qquad y_T = \frac{y_T^- + \beta y_T^+}{1+\beta} \,, \tag{26}$$

где через y_q^σ *и* y_T^σ *обозначены переменные из множеств* $y_q^\sigma \in \left\{J_{qa}^\sigma,\ q_a^\sigma\right\}$ и $y_T^\sigma \in \left\{J_{Ta}^\sigma,\ d_a^\sigma,\ T_a^\sigma\right\}$, $\sigma \in${*пусто, +, -*}.

При этом

$$J_{Ta}^{+} + \chi J_{qa}^{-} = R_a^0\ , \qquad J_{Ta}^{-} + \chi J_{qa}^{+} = R_a^0,$$

и *для каждого* β*,* $0 \le \beta \le \infty$*,*

$$J_{Ta} + \chi J_{qa} = R_a^0\ . \tag{27}$$

Итак, величины y_q, y_T в (26) есть линейная комбинация этих величин для водной поверхности и почвы, лишенной растительности, что позволяет описать перенос тепла и влаги как в редком, так и в развитом растительном покрове. Измеряя R_a^0, d_a^0, T_a^0, q_a^0 на высоте метеобудки, можно, зная β, найти потоки тепла и влаги, а также переменные водного режима почвы.

Кроме того, измеряя y_q, y_T в контрастных метеорологических условиях, можно получить статистическую оценку для β, а затем с помощью (30) оценить согласованные с моделью параметры растений.

Теорема 2. *При* $D'_{\Sigma}/D'_T \ll 1$, $D'_{\Sigma}/D'_{Ts} \ll 1$ *дополнительно к (26)-(27) справедливы при* $0 \le \beta \le \infty$ *соотношения*

$$J_{ql} = J_{qa}^{+}\big/(1+\beta)\ , \qquad J_{Tl} = R_l - \chi J_{ql}\ ;$$

$$J_{q0} = \beta b J_{qa}^{+}\big/(1+\beta)\ , \qquad J_{T0} = R_s - \chi J_{q0}\ . \tag{28}$$

В безразмерном параметре β аккумулируются все параметры растений, влияющие на тепло- и влагоперенос в покрове: водный потенциал листьев ψ_l, площади активных поверхностей листьев

S_l и корней S_k. Зависимости (26) от β представлены на рис. 1, а зависимости (28) – на рис. 2.

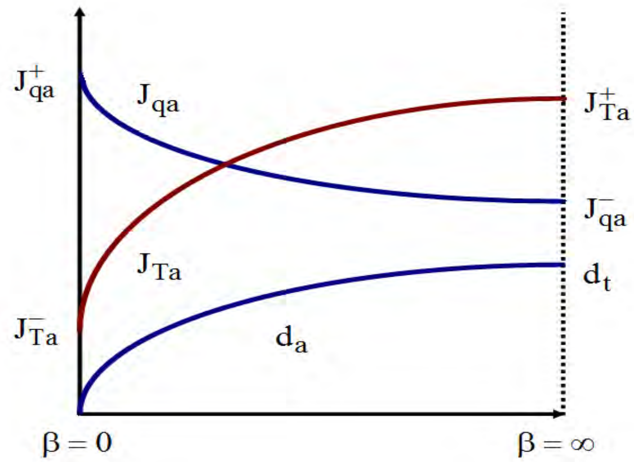


Рис. 1

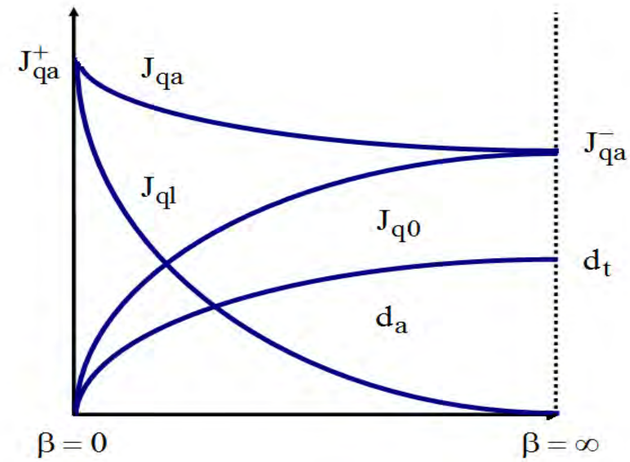


Рис. 2

Доказано, что зависимости в левой части (19)-(25) отвечают испарению с поверхности почвы, лишенной растительности ($\beta \to \infty$), а соотношения в правой части – испарению со свободной поверхности воды ($\beta \to 0$). Итак, зависимости (26) для растительного покрова представляют линейную комбинацию этих двух крайних ситуаций. Они позволяют также сформулировать легко измеряемые критерии адекватности модели (26)-(28) в виде

$$(y_q^+ - y_q)\big/(y_q - y_q^-) = \beta\ ,\ (y_T^+ - y_T)\big/(y_T - y_T^-) = \beta^{-1}. \quad (29)$$

например, в частности,

$$(J_{qa}^+ - J_{qa})\big/(J_{qa} - J_{qa}^-) = \beta\ ,\ (T_a^+ - T_a)\big/(T_a - T_a^-) = \beta^{-1}.$$

Из (12) и $D_l'/D_T' << 1$ получено выражение для β, зависящее от переменных $\overline{\mu}_s$, S_l , S_k так, что $\beta = \infty$ при $\overline{\mu}_s > 1$ и

$$\beta = \frac{(D'_a + D'_s) r_{s0}}{S_l} \frac{1 - \delta_l \bar{\mu}_s}{1 - \bar{\mu}_s} + A_{kc} \frac{J^+_{qa}}{S_k} \frac{1}{1 - \bar{\mu}_s}, \text{ при } 0 < \bar{\mu}_s < 1;$$

$$\bar{\mu}_s = \psi_m^{-1} \int_{-\infty}^{0} \psi_s p_k dx \ , \ A_{kc} = \frac{1 + D_k (r_{kc} S_k)}{-\psi_m D_k}; \tag{30}$$

При $S_l \to 0$ и $S_k \to 0$ в неразвитом РП $\beta \to \infty$, что правильно отвечает на рис 1, 2 случаю отсутствия РП. При $S_l \to \infty$, $S_k \to \infty$ величина $\beta \to 0$, если учесть, что при этом должно быть также $\bar{\mu}_s \to 0$. Это правильно на рис 1, 2 отвечает РП, залитому водой.

Оценивая величину β с помощью выражений (29) при различных контрастных условиях можно получить согласованные с моделью статистические оценки используемых параметров растительного покрова.

7. Уравнение влагопереноса в почве

В отличие от (14)-(16) выражения (26)-(28) позволяют сформулировать сравнительно простое уравнение влагопереноса в почве независимо от уравнения теплопереноса и уравнения влагопереноса в растительном покрове. Уравнение влагопереноса имеет вид:

$$c_\psi \frac{\partial \psi_s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k_{\psi s} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} \right\} + J_{ql} p_k = 0, \ J_{ql} = J^+_{qa} \big/ (1 + \beta) \ ;$$

$$k_{\psi s} \frac{\partial \psi_s}{\partial x} + J_{q0} = Q(t), \quad J_{q0} = \beta b J^+_{qa} \big/ (1 + \beta) \ ; \qquad x = 0;$$

$$\psi_s = \psi_s^0 \ ; \qquad x = -H_s;$$

При этом β зависит от переменных $\bar{\mu}_s$, S_l, S_k так, что $\beta = \infty$ при $\bar{\mu}_s > 1$ и при $0 < \bar{\mu}_s < 1$ определяется выражением (30).

8. Оценки

Оценим D'_l / D'_T.

$$\frac{D'_T}{D'_l} = 1 + \frac{c_p}{\delta\chi}\frac{D_T}{D_q} = 1 + \frac{c_p}{\delta\chi}\left(1 + D_T r_{s0}\frac{1-\delta_l\mu_l}{1-\mu_l}\right);$$

$$c_p/(\delta\chi) = 0.52;\ D_T \approx 3 * 10^{-2}\,\text{м / сек};\ r_{s0} \approx 150\,\text{сек / м};$$

$$\frac{D'_T}{D'_l} \approx 1.5 + 2.6\frac{1-\delta_l\mu_l}{1-\mu_l} \geq 9.3 \text{ при } \mu_l = 0.5,\ \delta_l = -1.$$

Таким образом, $D'_l / D'_T \leq 0.1$, т.е. условие $D'_l / D'_T << 1$, представляется разумным. Очевидно, необходима проверка критериев (29).

Литература

1. Воротынцев А.В. Исследование модели переноса тепла и влаги в системе почва-растение // Математическая биология и биоинформатика. Спецвыпуск по итогам конференции ЭкоМатМод-2011. – 2012. - Т. 7, № 1. - С. 45-53.
2. Полуэктов Р.А. Динамические модели агроэкосистем. Л.: Гидрометеоиздат. 1991. 312 с.

Спасибо за внимание